UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

VICERECTORADO DE INVESTIGACION

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN DE ECONOMÍA

INFORME FINAL DE INVESTIGACIÓN

"ELABORACIÓN DE UN TEXTO:EJERCICIOS DE MICROECONOMÍA I"

AUTOR: Mg. JAVIER CASTILLO PALOMINO

(Período de Ejecución 01 de febrero del 2010 al 31 de enero del 2012
Resolución N° 326-2010-R)

CONTENIDO

Introducción

La búsqueda del mejor uso de los recursos hace necesario contar con una herramienta que nos proporcione elementos de juicio para una mejor toma de decisiones, esta necesidad implica la elaboración de un proyecto de inversión, que sustentado en un estudio ordenado y coherente permita, en función a la calidad de la información, la mayor certidumbre para llevar a cabo con éxito la inversión.

Los estudiantes necesitan que se les muestre como se elabora un proyecto en términos prácticos más que teóricos. Requieren un texto que les muestre tanto la teoría como ejemplos y ejercicios prácticos, necesitan conocer que tipo de información se requiere, como es el tratamiento de ésta y cómo se la presenta para ir articulando cada una las partes que componen el proyecto de inversión. Este trabajo surge como respuesta a esa necesidad y a propuesta de los estudiantes que con legitima avidez nos solicitan permanentemente nuestras copias y nos piden les informemos sobre bibliografía dónde encuentren casos o ejercicios sobre el tema.

Este libro es resultado de la conjugación de la experiencia acumulada durante el desempeño profesional en el área d formulación de proyectos, el trabajo docente, que requiere constante capacitación y actualización sobre el tema, y la revisión las fuentes de información tradicional y reciente.

La estructura del libro ha sido desarrollada en ocho capítulos, ordenados de acuerdo a la forma secuencial como se elaboran los Estudios de un proyecto de inversión desde la concepción de la idea hasta la elaboración del flujo de caja. Así, primero se abordan los contenidos de Definiciones básicas, el Estudio de mercado, el tamaño y la localización, la Ingeniería del proyecto, Las inversiones y el Financiamiento, los ingresos y costos, los Estados financieros, y la Organización.

El presente trabajo tiene un contenido teórico que pretende que los estudiantes asimilen conceptos, técnicas y procedimientos actualizados sobre el tema de los proyectos de inversión, por otra parte, a manera de guía busca orientar y dar indicaciones las materias que debe contener un estudio de preinversión. Cada capitulo tiene ejemplos y aplicaciones para los temas más importantes. Asimismo se incluyen cuestionarios y ejercicios propuestos como complemento didáctico. El libro busca que su lectura sea fácil, clara y amena, y sobre todo accesible no sólo a los estudiantes de economía.

I. TEORIA DE LA ELECCIÒN INDIVIDUAL

1.1. La Restricción Presupuestaria

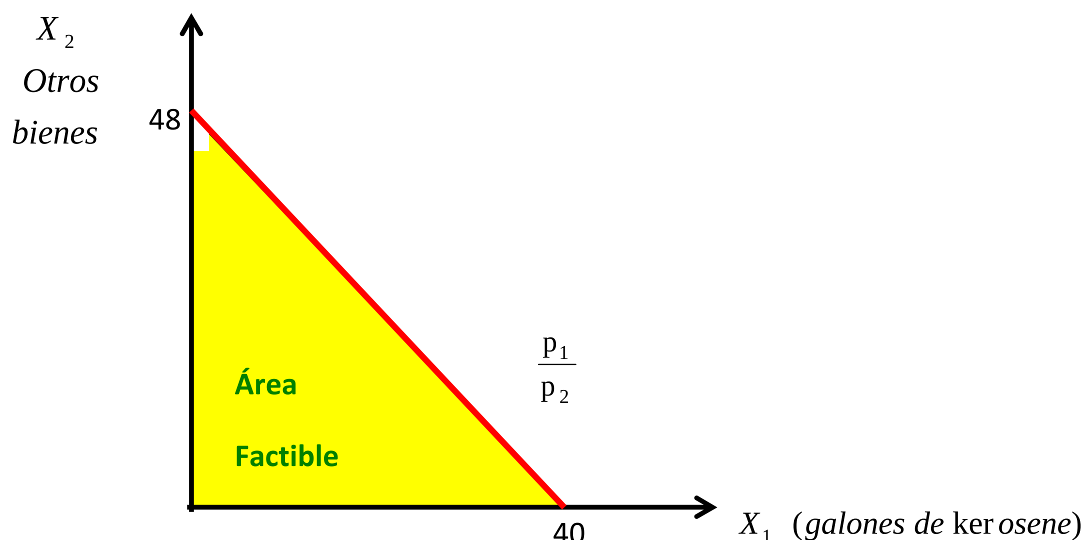
1. En el Callao, un 10% de los hogares usa el kerosene como combustible para la cocción de alimentos. Uno de estos hogares cuenta con una renta promedio de S/480 que los destina al consumo de kerosene y otros bienes. El precio del kerosene es de S/12 el galón y el de los otros bienes, S/ 10. Con esta información se le pide:

   a) Represente la restricción presupuestaria.
   b) Con el fin de fomentar el uso de otros combustibles, el Gobierno Regional limita el consumo de kerosene hasta 30 galones. Delinee la restricción presupuestaria.
   c) El Gobierno reformula la medida anterior y permite consumir más de 30 galones, pero cadagalón adicional costará S/15. Trace la nueva restricción presupuestaria.
   d) El Gobierno Regional decide otorgar un subsidio en efectivo de S/ 120 a cada hogar ¿cómo se verá modificada la restricción presupuestaria?
   e) ¿Cómo será la restricción presupuestaria si el Gobierno Regional cambia el subsidio por un bono intransferible que equivale a 10 galones de kerosene?.
   f)Si el bono se pudiese vender a mitad de precio ¿Cómo sería la restricción?.

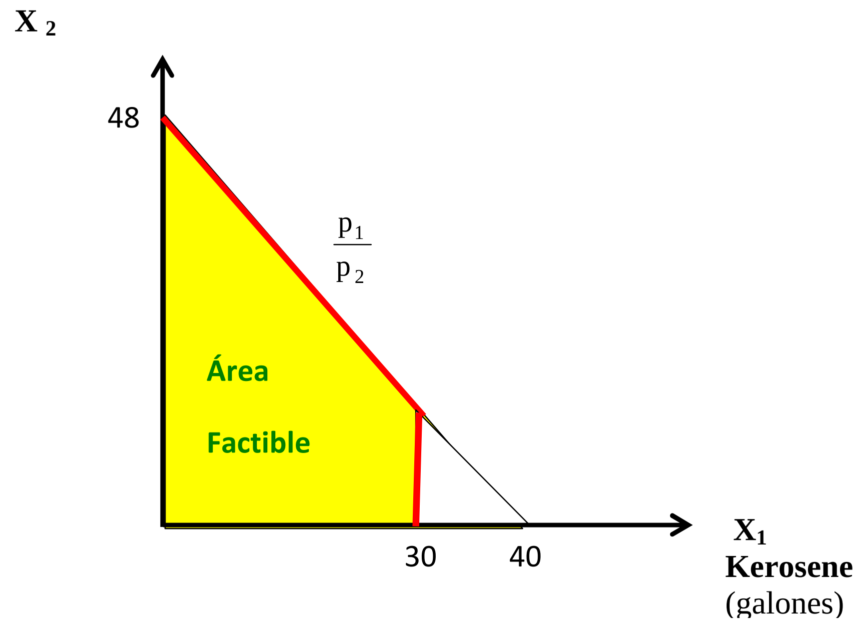
Solución

a) Restricción presupuestaria inicial

$$12x_1 + 10\,x_2 = 480$$



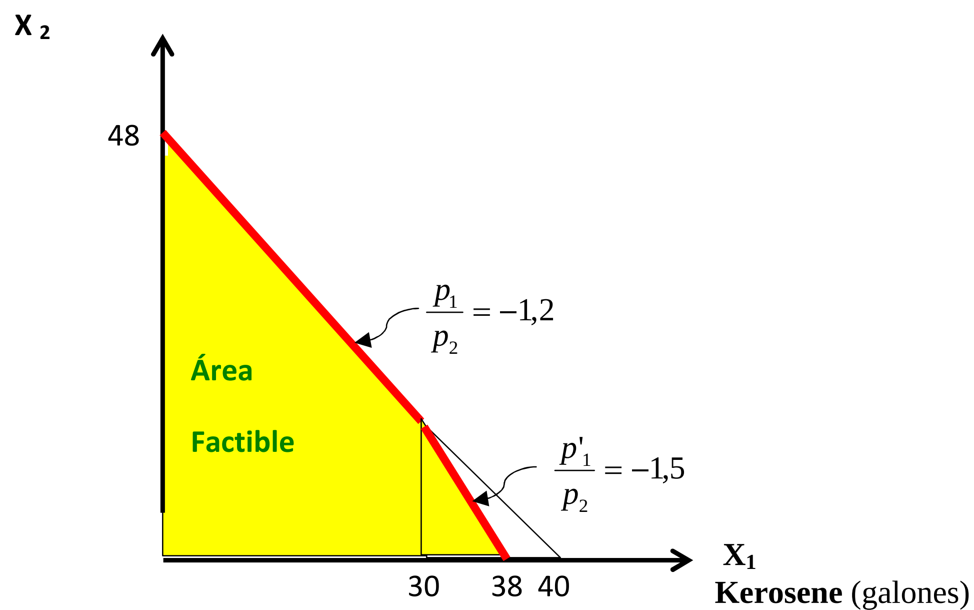
b) Restricción presupuestaria con límite al consumo de kerosene



c) Restricción presupuestaria con posibilidad de compra más allá del límite

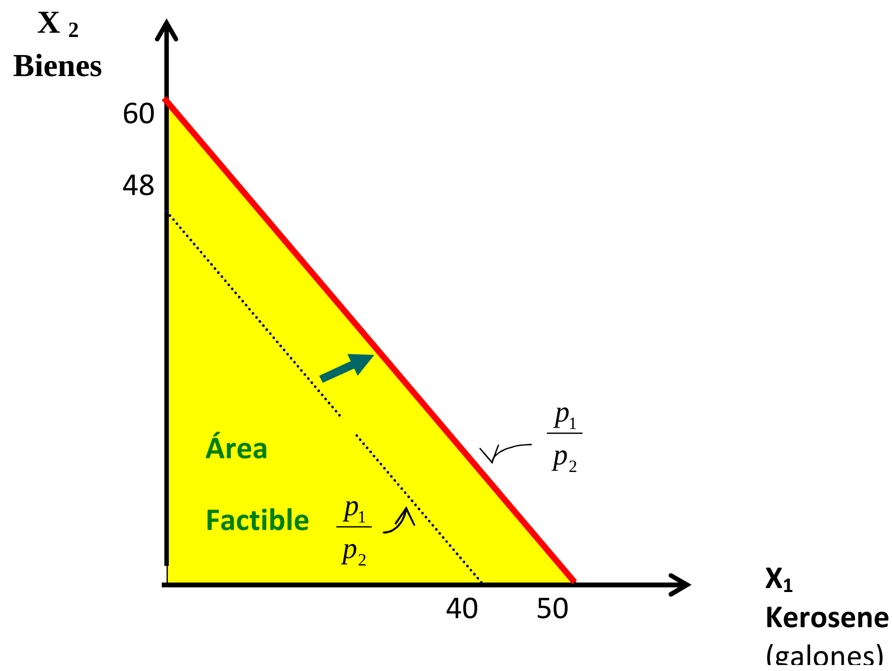
Consumo de kerosene:

Precio	Galones	Gasto
12	30	360
15	8	120
	38	480

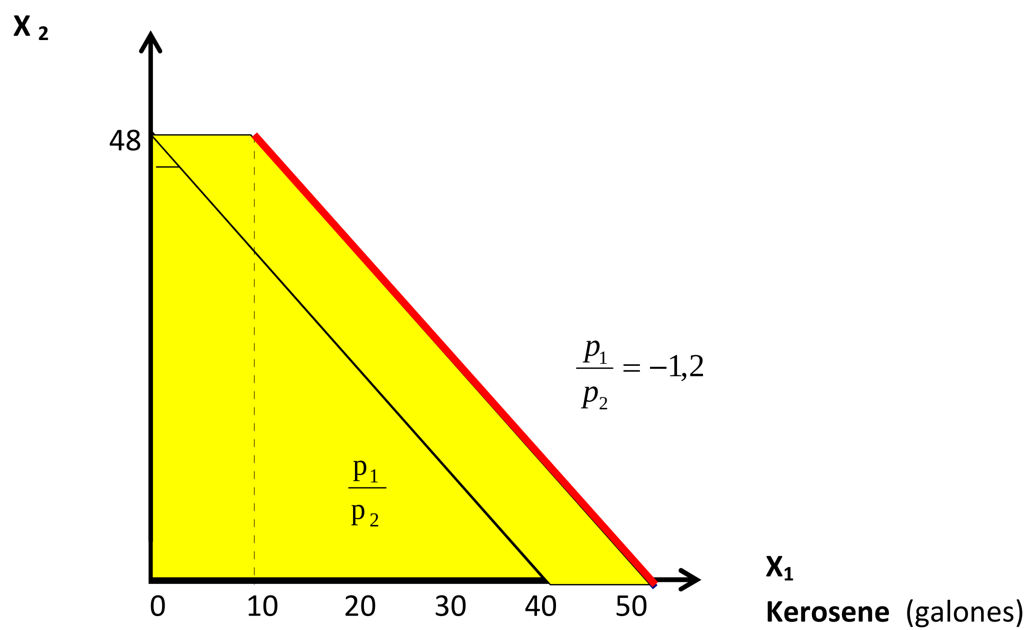


d) Restricción presupuestaria con un subsidio en efectivo de S/120

$$12x_1 + 10\,x_2 = 480 + 120 = 600$$

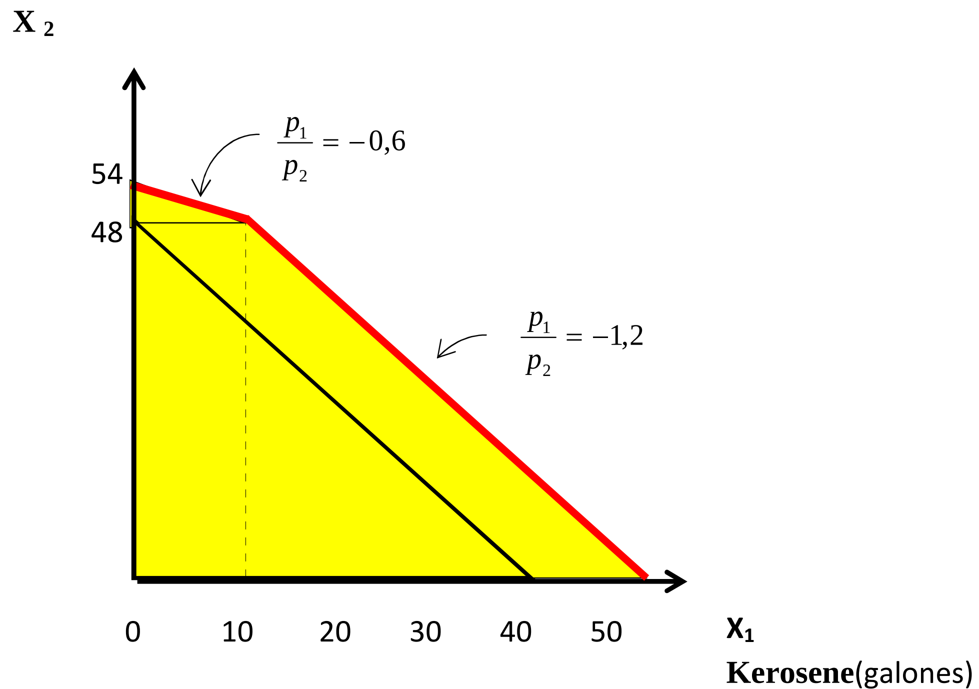


e) Gobierno Regional subsidia con bono por 10 galones de kerosene



f) La familia puede vender el bono a mitad de precio

Los 10 galones que son parte de su consumo los puede vender y obtener un ingreso de S/60 a 0, y adquirir de 6 a 0 unidades de otros bienes, según los venda todos o ninguno.



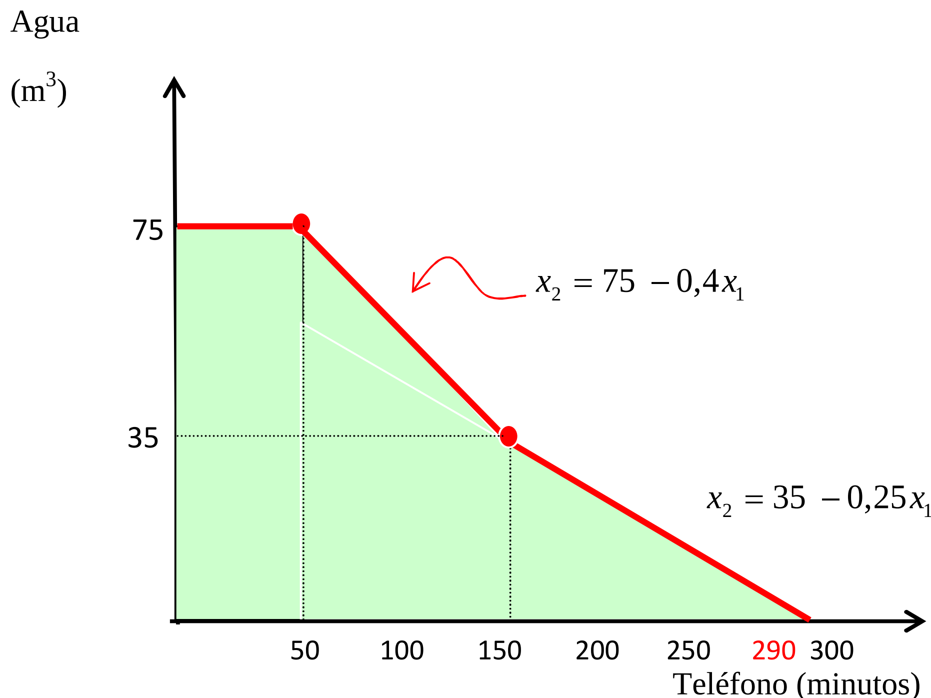
2. Un consumidor dispone de S/.150 para pagar los servicios de agua y teléfono. El agua le cuesta S/. 2.00 el m^3 , mientras que la modalidad del pago del teléfono es la siguiente: los primeros 50 minutos son gratis, los siguientes 100 minutos valen S/. 0.80 c/u, y los restantes, S/. 0.5 c/u. Trace su restricción presupuestaria.

Solución

La recta presupuestaria de este consumidor tendrá tres tramos. En el primero la pendiente es cero, debido a que si todo su ingreso lo gasta en agua, consumirá hasta 75 m^3 , y de 0´ a 50´ de teléfono (gratis).

El segundo tramo se inicia cuando sobrepasa los 50´ gratis, hasta que su gasto en servicio telefónico, que ahora cuesta S/ 0,80/minuto, llega a S/.80 por los siguientes 100’ de consumo; con la diferencia, S/70, completa su canasta, consumiendo 35 m^3 de agua (S/.70/2).

El tercer tramo, tiene una pendiente más suave, porque el costo por minuto es de S/ 0,50, y representa la opción de destinar los S/70 al consumo paulatino de minutos de teléfono hasta un máximo de 140’ (S/.70/0.5).



2. Yuri es un empresario exportador que tiene un fondo para marketing que tiene dos destinos: viajes de promoción al exterior y publicidad. Una agencia de viajes le ha propuesto, para este año, que si acumula 30 tickets aéreos, por los siguientes recibe un descuento del 20%. Llegado a los 70 pasajes recibe 5 pasajes gratis y cada ticket adicional tendrá un nuevo descuento de 25%.

Para el presente año, el presupuesto de Yuri para estos gastos es de $ 49,000, el precio de cada ticket es de $500 mientras que el de cada anuncio publicitario es de $200.

Determine:

a) ¿Cómo será su restricción presupuestaria?
b) Trace la restricción presupuestaria
c) ¿Hasta cuantos pasajes podrá comprar este año?

Solución

a) En la restricción presupuestaria:

$$m = p_1 X_1 + p_2 X_2$$

Los pasajes son representados por el bien 1, mientras que los anuncios publicitarios, por el bien 2, entonces:

De 0 a 30 pasajes, la restricción presupuestaria es:

$$49.000 = 500 X_1 + 200 X_2$$

Luego, de más de 30 a 70 pasajes, la restricción varía porque el precio se reduce:

$p_1^1 = 0{,}8\ p_1$

$p_1^1 = 0{,}8\ (500)$

$p_1^1 = 400$

Entonces,

$$49.000 = 400 X_1 + 200 X_2$$

Finalmente, para más de 70 pasajes el precio es otro:

$$p_1^{''} = 0{,}75(400)$$

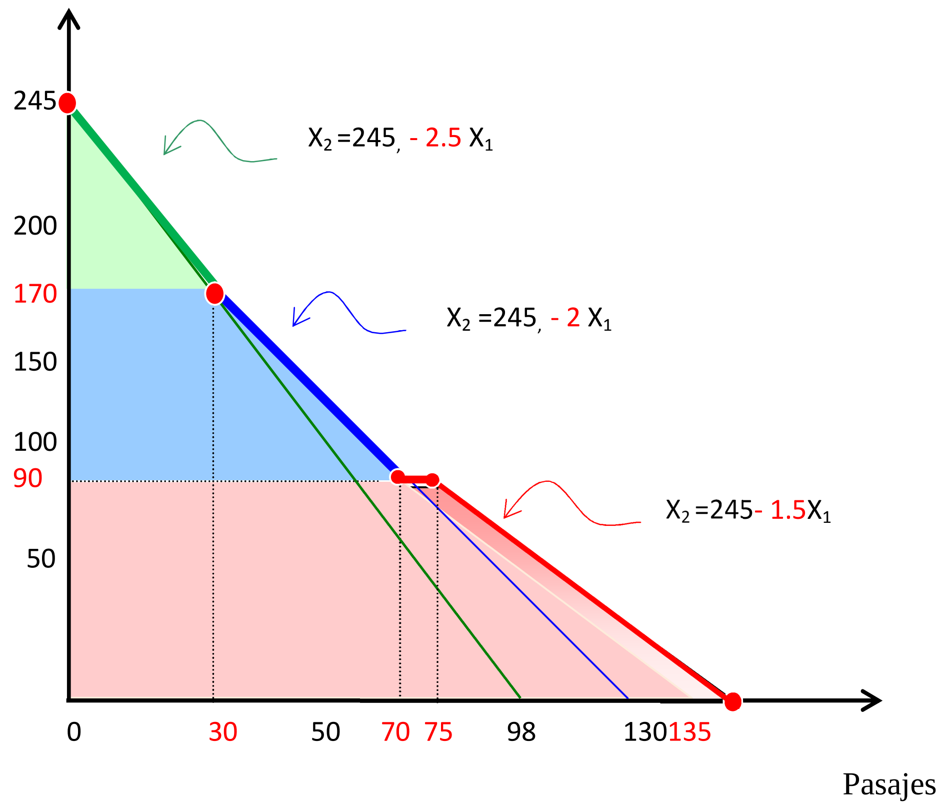
$$p_1^{''} = 300$$

Entonces,

$$49.000 = 300 X_1 + 200 X_2$$

b) Trazo de la restricción presupuestaria

Publicidad



c) El número de pasajes que podrá comprar:

En los dos primeros tramos:

30 x $500 = $15.000
<u>40</u> x $400 = $<u>16.000</u>
70 $ 31.000

Para el último tramo se cuenta con $ 18.000 (49.000-31.000). con los que se puede adquirir 60 pasajes (18.000/300) a los que hay que agregar los 5 pasajes gratis.

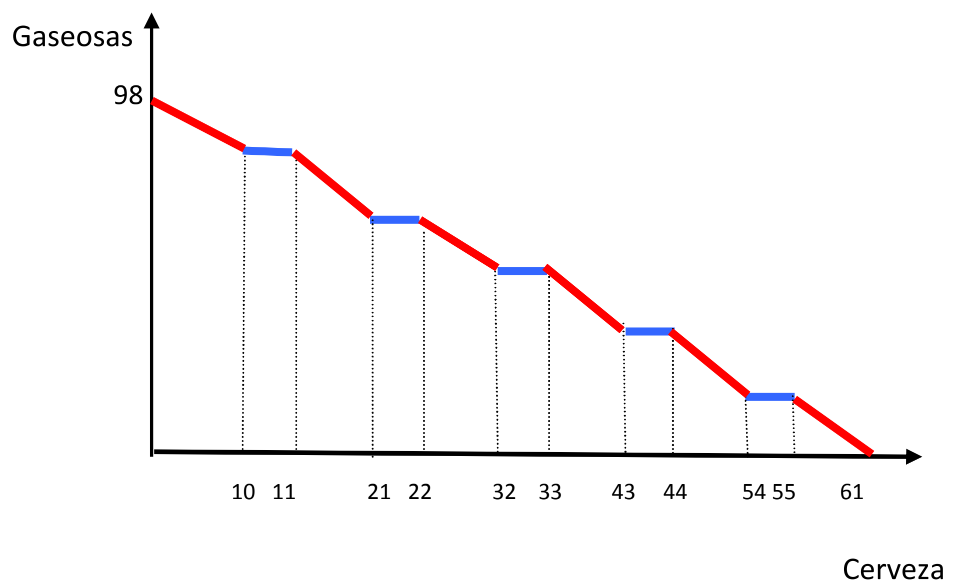
Por tanto el total de pasajes que se podrán adquirir son 135 pasajes

4. Bimbo Rejas está encargado de la compra de refrescos y cerveza para la fiesta de la semana de la FCE. Ha averiguado que el precio de la caja de gaseosas es S/.20.00 y que la caja de cerveza cuesta S/.35.00 (S/. 3.00/unidad). Bimbo sólo puede gastar S/.1960. Los proveedores le envían sus propuestas. Con respecto a las gaseosas no tiene problemas, pero en relación a la cerveza, Bimbo elige una que le interesa sobremanera: por la compra de 10 cajas de cerveza le dan una de regalo. ¿Cómo será su restricción presupuestaria?.

Solución

Con S/ 1.960 podrá comprar hasta 98 cajas de gaseosas solamente. Por otra parte, si sólo compra cerveza, podrá obtener 56 cajas, más las 5 cajas gratis, haciendo un total de 61 cajas. La restricción presupuestaria que expresa estas compras y las otras diferentes combinaciones es la siguiente

Gráfico



5. El comedor de la UNAC vende el menú a S/ 4.00. El concesionario ofrece un bono que cuesta S/. 20 y equivale a 6 menús (S/. 3.33/menú). Un estudiante cuenta con S/. 200 por mes, y sus gastos son en alimentación y en pasajes (S/1.00/viaje). Solo se puede adquirir un bono por mes.

   a) Plantee la restricción presupuestaria mensual del estudiante cuando no compra el bono. Grafique.
   b) Plantee la restricción presupuestaria mensual del estudiante cuando compra el bono. Grafique.

Solución

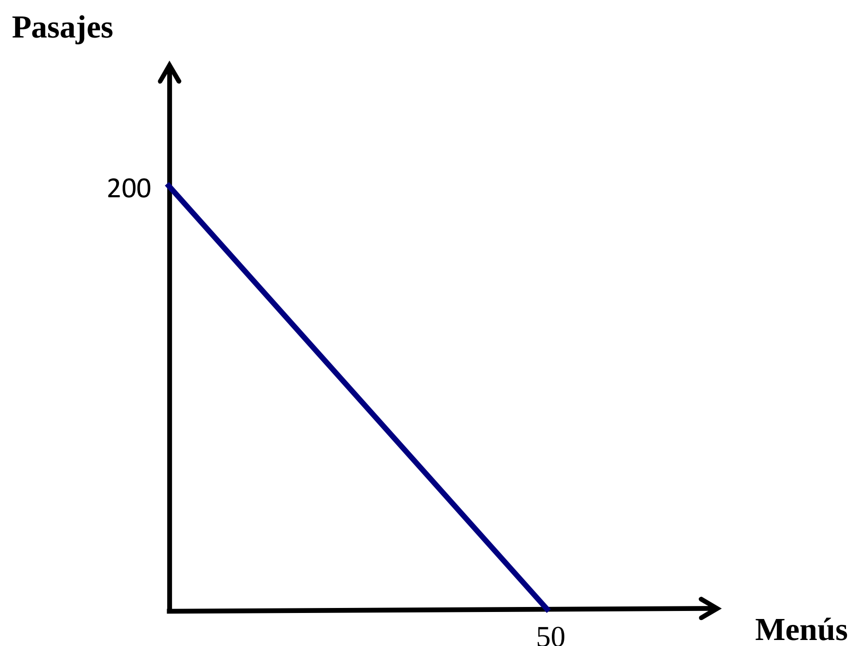
a) Si no compra el bono, su restricción presupuestaria será:

$$m = p_1 X_1 + p_2 X_2$$

Teniendo en cuenta la información, asumiendo que X_1 representa los menús, y X_2,los pasajes, tendremos que la restricción presupuestaria es:

$$200 = 4X_1 + X_2$$

Gráfico. Estudiante no compra el bono



b) Si compra el bono, entonces X_1= 6 , y la restricción presupuestaria tendrá las modificaciones siguientes:

Se reduce el ingreso disponible: 200-20 = 180

Luego, si solo se usa para X_2, se podrá adquirir como máximo:

$$X_2 = \frac{180}{1} = 180$$

Si el consumo de menús es mayor a seis ($X_1 \geq 6$), la restricción presupuestaria será:

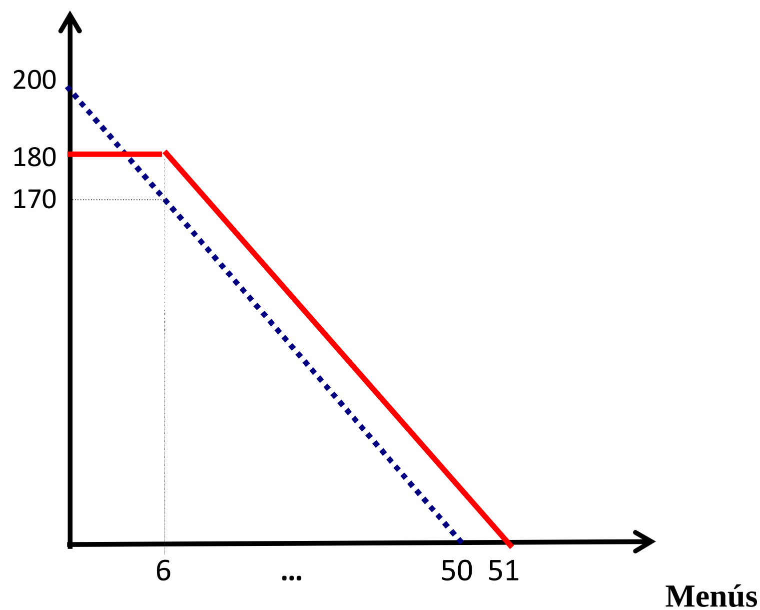
$$m - 20 = 4(X_1 - 6) + X_2$$

$$200 - 20 = 4(X_1 - 6) + X_2$$

$$180 = 4X_1 - 24 + X_2$$

$$204 = 4X_1 + X_2$$

Gráfico. Estudiante compra el bono



1.2. Equilibrio del Consumidor

1. Juan viajaráaChincha e Ica para hacer unas encuestas. Sus viáticos para alimentación en cada destino son de S/. 60. Sólo comerá sus platos favoritos,sopa seca y carapulcra,; sus preferencias por ambos platos son iguales. En Chincha el precio de la sopa seca es S/. 20, y el de la carapulcra S/15. En Ica, la sopa seca cuesta S/15 y la carapulcra, S/. 15, pero como la ciudad de Ica va a estar de aniversario, aquí habrá la oferta de que luego del consumo de 2 platos de sopa seca, los siguientes se venden a mitad de precio.

   Determine:

   a) ¿Qué y cuántos platos consumirá Juan en Chincha?
   b) ¿Qué y cuántos platos consumirá Juan en Ica?
   c) ¿En qué lugar obtendrá mayor Utilidad?

Solución

Para Juan, de acuerdo al enunciado, los platos que consumirá son sustitutos perfectos, por tanto su función de utilidad será de la forma:

$$U = X_1 + X_2$$

Donde: X_1 : sopa seca (cantidad de platos)
X_2 :carapulcra (cantidad de platos)

Dado que la función de utilidad es una recta, el equilibrio será en uno de los ejes, dependiendo de la pendiente de la restricción presupuestaria

a) En Chincha

La restricción presupuestaria será:

$$20\,x_1 + 15\,x_2 = 60$$

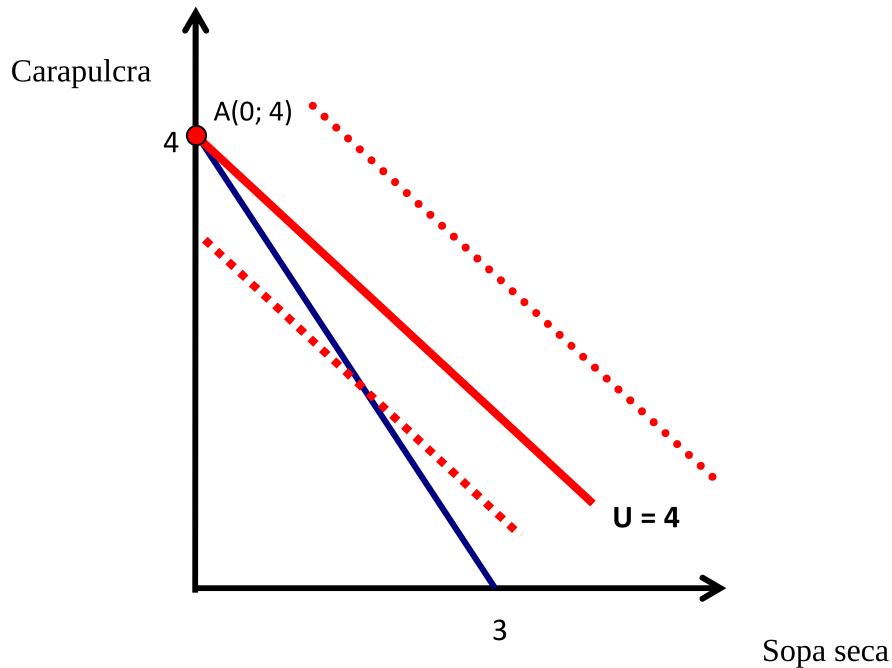
Pendiente de U: Pendiente de R. P.:

$$pend._U = -\frac{1}{1} = -1 \qquad pend._{RP} = -\frac{20}{15} = -\frac{4}{3}$$

$$|pend._{RP}| > |pend._U| \Rightarrow equilibrio\ en\ eje\ Y$$

En el gráfico inferior se observa que el consumo óptimo será una solución llamada "solución esquina", en este caso sobre el eje Y en A (0; 4). Es decir, Juan consumirá únicamente carapulcra, 4 platos.

Gráfico. Óptimo en Chincha



b) **En ICA**

<u>Pendiente de U</u>

pend.$_U$ = -1

<u>Pendiente de R.P.</u>

<u>De 0 a 2 platos de sopa seca</u>

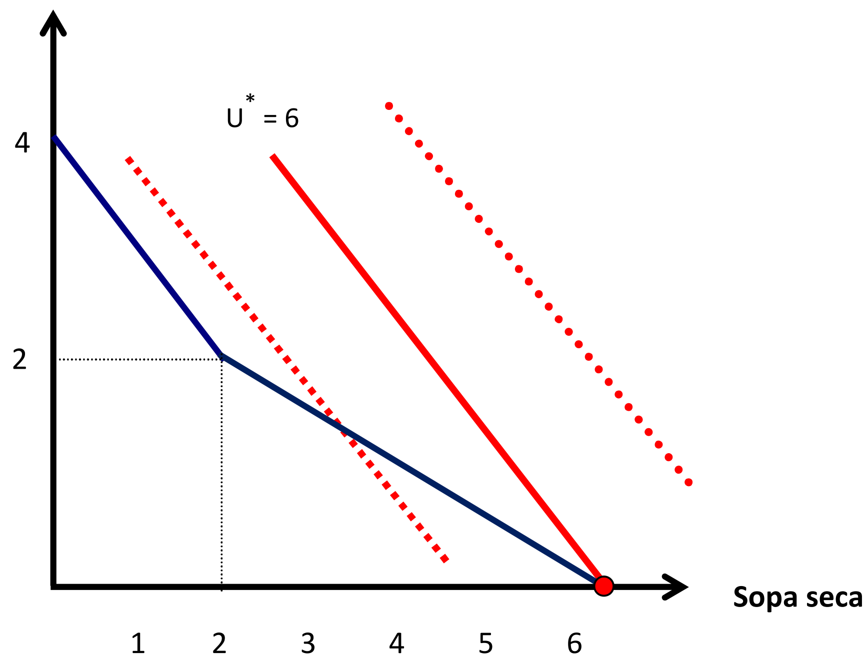
$$pend._{RP} = -\frac{15}{15} = -1$$

<u>De 2 a 10 platos de sopa seca</u>

$$pend._{RP} = -\frac{7,5}{15} = -0,5$$

En este caso, la restricción presupuestaria tiene dos tramos (ver gráfico siguiente). El primero con una pendiente igual a la de la función de utilidad, desde el intercepto con el eje Y hasta la combinación (2, 2). El segundo, desde este punto hasta (6, 0), con una pendiente menor a la de la función de utilidad; por tanto, el consumo óptimo se dará en el eje X, esta vez sólo consumiendo sopa seca. Así, Juan consumirá 6 platos de sopa seca, solamente, obteniendo una utilidad de 6.

Gráfico. Óptimo en Ica



c) El consumo óptimo en Chincha será (0, 4), entonces alcanzará una utilidad de:

   U = 0 + 4 = 4

   En Ica el consumo óptimo será (6, 0); luego, la Utilidad será: U= 6 + 0 = 6

   Por tanto, la máxima utilidad la obtiene en Ica.

2. El concesionario de la FCE vende en verano chupetes de maracuyá y de fresa. Cada chupete lo vende a S/1. Se ha estimado que un consumidor promedio de chupetes destina S/12 por semana para este producto, y su función de utilidad está representada por:

$$U = X_1 + Ln\,X_2$$

Donde

X_1 : cantidad de chupetes de fresa

X_2 : cantidad de chupetes de maracuyá

Se pide:

a) Hallar el consumo óptimo del consumidor. Grafique
b) Dado que el consumidor consume en mayor proporción los chupetes de fresa, se decide aumentar el precio de éstos en S/0,50 y, a la vez, rebajar en el mismo monto los chupetes de maracuyá. ¿Logrará revertir la tendencia del consumo?. Grafique
c) Otra medida más drástica que se ensaya es mantener los precios iniciales pero por la compra de cada 4 chupetes de maracuyá se dan gratis 5 chupetes de esta fruta ¿Logrará ahora si su objetivo?. Grafique.

Solución

a) Para hallar el consumo óptimo planteamos el problema primal y resolvemos:

$$\begin{aligned} Max.\quad & x_1 + \ln x_2 \\ s.a:\quad & p_1x_1 + p_2x_2 = m \end{aligned}$$

$$\ell: \quad x_1 + \ln x_2 + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2)$$

C.P.O.:

$$\partial\ell/\partial x_1 = 1 - \lambda p_1 = 0 \quad \text{... (1)}$$

$$\partial\ell/\partial x_2 = \frac{1}{x_2} - \lambda p_2 = 0 \quad \text{... (2)}$$

$$\partial\ell/\partial x_1 = m - p_1 x_1 + p_2 x_2 = 0 \quad \text{... (3)}$$

De (1) y (2), obtenemos la demanda marshalliana de x_2 :

$$\frac{1}{1/x_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{p_1}{p_2}$$

Luego, reemplazando x_2 en la R.P, reduciendo y despejando, obtenemos la demanda marshallliana de x_1:

$$p_1 x_1 + p_2\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = m$$

$$p_1 x_1 + p_1 = m$$

$$x_1 = \frac{m - p_1}{p_1}$$

Reemplazando los datos, se obtiene la demanda óptima :

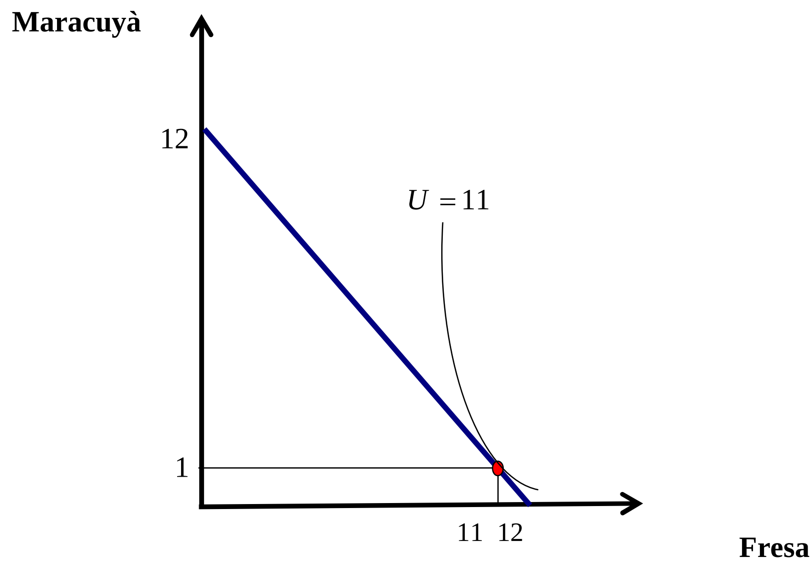
$$x_1 = \frac{12-1}{1} = 11 \qquad\qquad x_2 = \frac{1}{1} = 1$$

La utilidad máxima:

$$U = 11 + Ln\ 1$$

$$U = 11$$

Gráfico. Equilibrio inicial



b) Con esta otra medida, la restricción presupuestaria será:

$$1{,}5x_1 + 0{,}5x_2 = 12$$

El consumo óptimo:

$$x_1 = \frac{12 - 1{,}5}{1{,}5} = 7 \qquad x_2 = \frac{1{,}5}{0{,}5} = 3$$

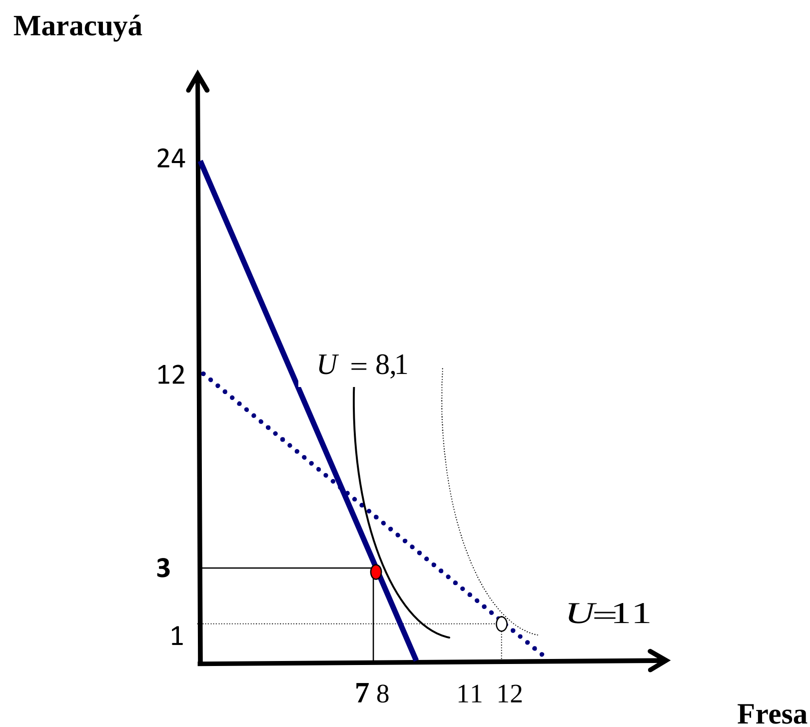
La utilidad máxima:

$$U = 7 + Ln\ 3$$

$$U = 8{,}1$$

Con esta medida mejora levemente la proporcionalidad en el consumo, pero aún se demanda en mayor magnitud chupetes de maracuyá (70%-30%). La utilidad del consumidor se reduce de 11 a 8,1.

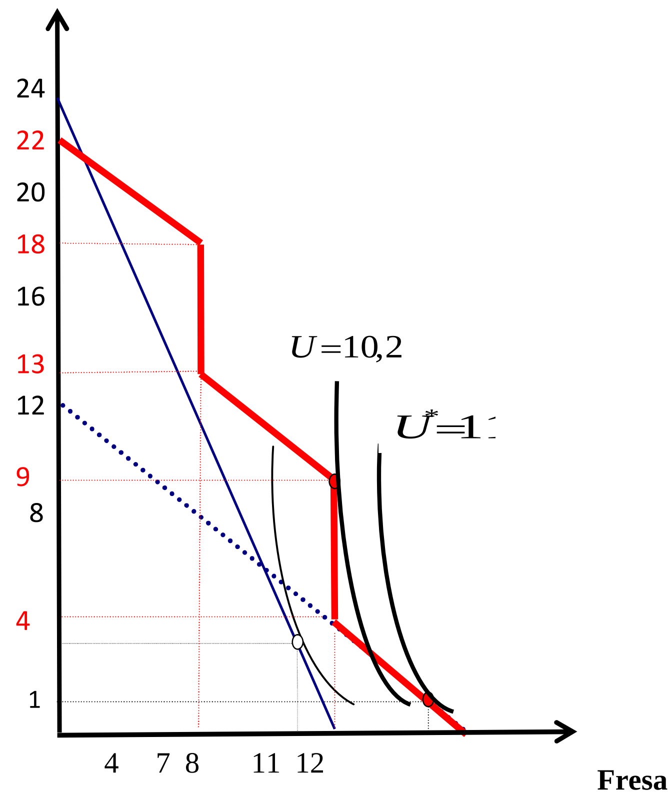
Gráfico. Equilibrio con modificación de precios



c) Con la oferta extrema: por la compra de cada 4 chupetes de maracuyá, se dan 5 gratis, se tendrá el siguiente gráfico:

Gráfico. Equilibrio con la oferta extrema

Maracuyá



Se observa en el gráfico que el óptimo se mantiene en la canasta (11,1) con la utilidad de 11.

En la restricción presupuestaria de la oferta la combinación que más se acerca a la utilidad máxima, es (8, 9) pues el consumidor obtiene una utilidad siguiente:

$$U = 8 + \ln 9 = 8 + 2{,}19 = 10{,}19$$

3. Un estudio de focalización de la pobreza ha encontrado que una familia pobre en el Callao tiene una dieta deficiente. Sus preferencias están expresadas en la función de utilidad $U = X_1X_2$; donde X_1 representa el consumo de pescado en kilos, y X_2 , el consumo de otros alimentos. Asimismo, cuenta con un ingreso de S/. 300 y los precios de los bienes que consume son S/. 7,50 y S/. 10, respectivamente. Las autoridades de salud señalan que las familias del Callao deben consumir como mínimo 30 kg. de pescado para satisfacer los niveles nutricionales adecuados.

Determine:

a) Si de acuerdo a sus preferencias las familias pobres satisfacen el nivel nutricional propuesto. Grafique la restricción presupuestaria y el equilibrio.
b) Si la Región decide subsidiar el ingreso de las familias pobres ¿a cuánto debe ascender el subsidio que les permita consumir el mínimo propuesto?. Grafique la restricción presupuestaria y el equilibrio.
c) Si, por el contrario, se desea subsidiar el precio del pescado ¿cuál debe ser el nuevo precio y cuánto tendría que desembolsar la Región?. Grafique,
d) Las familias indican que la medida anterior les reduce el bienestar que obtendrían con el subsidio al ingreso; de ser cierto ¿cuál debería ser el subsidio que mantenga dicho bienestar y que a la vez les permita acceder al mínimo de consumo requerido?

Solución

a) Para hallar el consumo óptimo planteamos el problema primal y resolvemos

$$\begin{aligned} &Max. \quad X_1X_2 \\ &s.a: \quad p_1X_1 + p_2X_2 = m \end{aligned}$$

$$\ell: \quad X_1 + \ln X_2 + \lambda(m - p_1X_1 - p_2X_2)$$

C.P.O.:

$$\partial\ell/\partial X_1 = X_2 - \lambda p_1 = 0 \quad ... (1)$$

$$\partial\ell/\partial X_2 = X_1 - \lambda p_2 = 0 \quad ... (2)$$

$$\partial\ell/\partial\lambda = m - p_1X_1 + p_2X_2 = 0 \quad ... (3)$$

De (1) y (2), obtenemos:

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{p_1}{p_2} \qquad \Rightarrow \qquad X_2 = \frac{p_1 X_1}{p_2} \qquad y$$

$$X_1 = \frac{p_2 X_2}{p_1}$$

Luego, remplazando X_2 y X_1 en la R.P, reduciendo y despejando, obtenemos las demandas marshalllianas:

$$p_1 x_1 + p_2\left(\frac{p_1 X_1}{p_2}\right) = m \qquad\qquad p_1\left(\frac{p_2 X_2}{p_1}\right) + p_2 x_2 + = m$$

$$p_1 X_1 + p_1 X_1 = m \qquad\qquad p_2 X_2 + p_2 X_2 = m$$

$$X_1 = \frac{m}{2p_1} \qquad\qquad X_2 = \frac{m}{2p_2}$$

Reemplazando los datos, se obtienen las demandas óptimas :

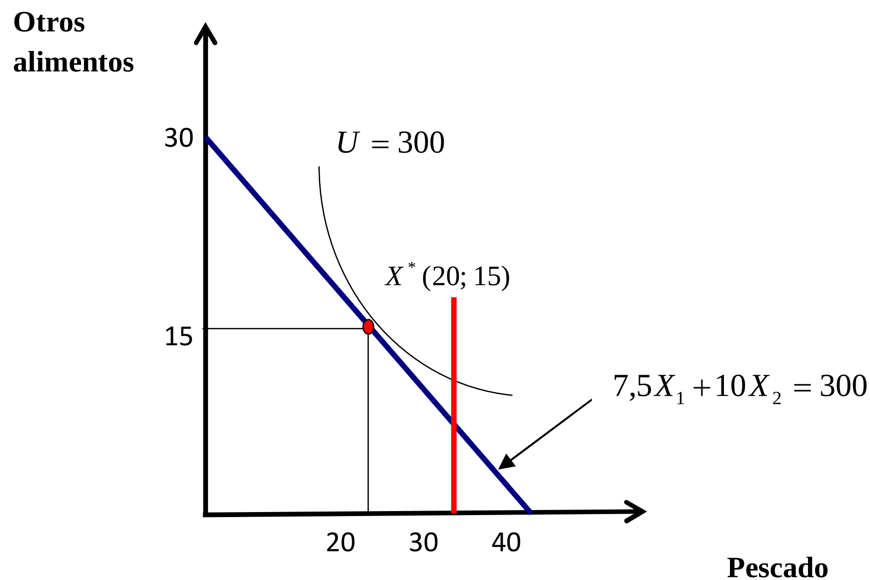
$$X_1 = 20 \qquad\qquad X_2 = 15$$

La utilidad máxima:

$$U = (20)(15)$$

$$U = 300$$

Gráfico. Equilibrio inicial



Por lo tanto, se observa que, de acuerdo a sus preferencias, la canasta óptima de una familia pobre del Callao no contiene el mínimo requerido.

b) **Subsidio de la Región al ingreso familiar**

Para saber el monto del subsidio (S) al ingreso que le permita alcanzar el consumo mínimo de pescado, se debe cumplir que:

$$\frac{m + S}{2p_1} = 30$$

Reemplazando datos y despejando S:

$$\frac{300 + S}{2(7{,}5)} = 30$$

$$S = 450 - 300$$

$$S = 150$$

La nueva restricción presupuestaria sería:

$$7{,}5X_1 + 10X_2 = 450$$

La canasta óptima:

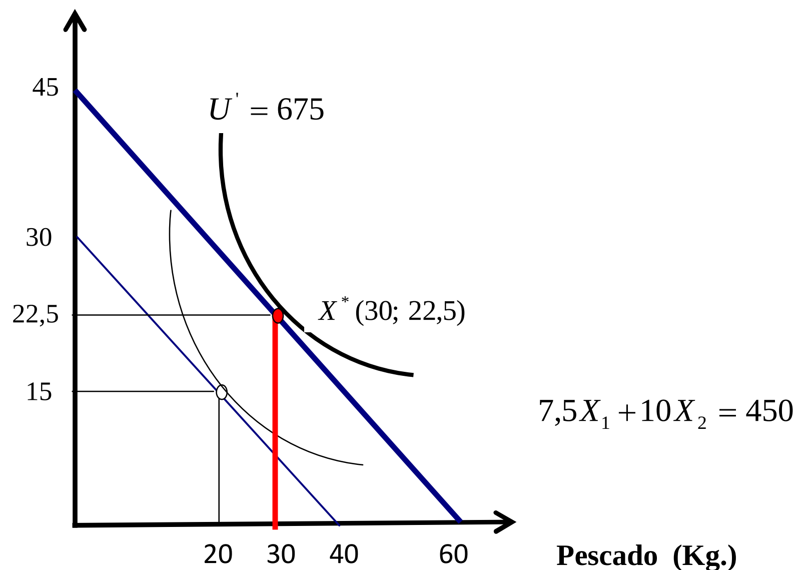
$$X_1 = \frac{450}{2(7{,}5)} = 30 \qquad\qquad X_2 = \frac{450}{2(10)} = 22{,}5$$

La nueva Utilidad:

$$U = (30)(22{,}5)$$

$$U' = 675$$

Gráfico. Equilibrio con subsidio al Ingreso



c) Subsidio de la Región al precio

Si denominamos: **s,** el subsidio al precio, entonces se debe cumplir que:

$$p_1 = p_1^1 + s$$

Siendo p_1: precio de mercado

p_1^1 : precio pagado por las familias

s: subsidio de la Región a los vendedores de pescado

Asimismo, se debe cumplir que:

$$\frac{m}{2p_1^1} = 30$$

Remplazando datos, operando y despejando p_1^1:

$$\frac{300}{2p_1^1} = 30$$

$$60p_1^1 = 300$$

$$p_1^1 = 5{,}00$$

La nueva restricción presupuestaria sería:

$$5X_1 + 10X_2 = 300$$

La canasta óptima:

$$X_1 = \frac{300}{2(5)} = 30 \qquad X_2 = \frac{300}{2(10)} = 15$$

La nueva Utilidad:

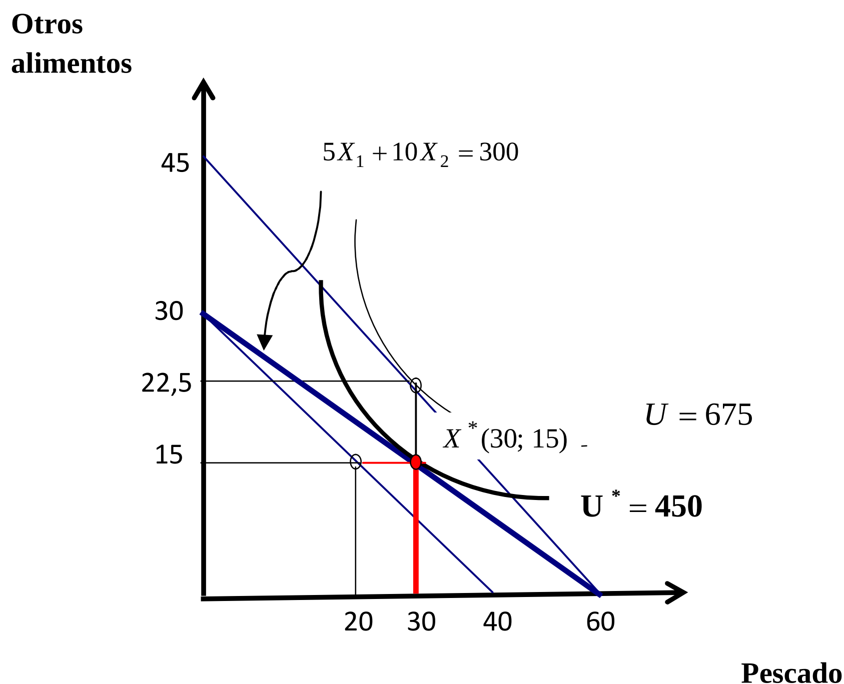
$$U^{''} = (30)(15)$$

$$U^{''} = 450$$

En este caso, los pobres, según sus preferencias, consumirán el mínimo requerido, pagarán S/5.00 por kilo de pescado; los pescadores o vendedores recibirán S/ 7,50 por kilo (el monto pagado por los consumidores más S/2,50 de subsidio pagado por la Región).

El monto total del subsidio, ascenderá a S/2.50 x 30 Kg. = S/ 75.00 por familia.

Gráfico. Equilibrio con subsidio al precio del pescado



d) Subsidio al precio que permite mantener el bienestar obtenido con subsidio al ingreso

Consumo óptimo:

- $$X_1 = \frac{300}{2p_1^{''}}$$

Se despejan las incognitas y se obtiene :

$$p_1^{''} X_1 = 150 \quad ... (\alpha)$$

- $$X_2 = \frac{300}{2(10)} = 15$$

Por otra parte, como se debe cumplir que:

$$X_1 X_2 = 675$$

X_1, se obtiene remplazando X_2:

$$X_1(15) = 675$$

$$X_1 = 45$$

Entonces, remplazandoeste valor en (α), y despejando obtenemos el precio que pagará el consumidor:

$$p_1^{''}(45) = 150$$

$$p_1^{''} = 3{,}33$$

Por tanto, el subsidio de la Región será:

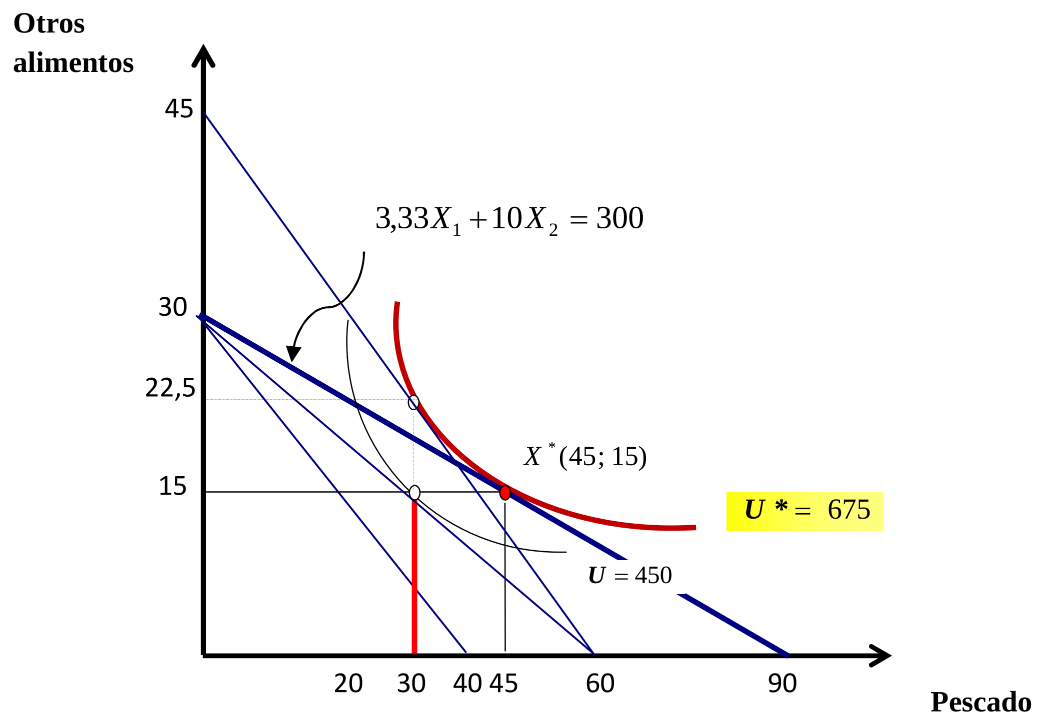
s = 7,50 -3,33

s = 4,17 x Kg.

El subsidio total:

4,17 x 45 = 187,65

Gráfico. Subsidio al precio, que mantiene el bienestar con subsidio al ingreso.



1.3. Dualidad en el Consumo: La Ecuación de Slutsky. La identidad de Roy. Lema de Sheppard.

1. Dadas las siguientes funciones de demanda compensada:

$$h_1(p,U) = \left(\frac{2Up_2}{p_1}\right)^{1/3} \qquad h_2(p,U) = \left(\frac{Up_1}{4p_2^2}\right)^{1/3}$$

Se pide:

a) Halle las demandas marshallianas
b) Determine la función de utilidad

Solución

a) En la restricción presupuestaria:

$$m = p_1X_1 + p_2X_2$$

RemplazamosXi , empleando la identidad $X_i(p,m) \equiv h_i(p,u)$

$$m = p_1(2up_2/p_1)^{1/3} + p_2(up_1/4p_2^2)^{1/3}$$

$$m = p_1^{2/3}(2up_2)^{1/3} + p_2^{1/3}(up_1/4)^{1/3}$$

$$m = p_1^{2/3}p_2^{1/3}[(2u)^{1/3} + (u/4)^{1/3}]$$

$$m = p_1^{2/3}p_2^{1/3}(4^{1/3}\,2^{1/3}\,u^{1/3} + u^{1/3})/\,4^{1/3}$$

$$4^{1/3}m = p_1^{2/3}p_2^{1/3}(2\,u^{1/3} + u^{1/3})$$

$$4^{1/3}m = p_1^{2/3}p_2^{1/3}(3\,u^{1/3})$$

Luego, para obtener la FUI[1], hacemos uso de la identidad u(X) = v(p,m), despejamos y operamos:

$$4^{1/3}m = p_1^{2/3}p_2^{1/3}(3\,v(p,m)^{1/3})$$

$$v(p,m)^{1/3} = \frac{4^{1/3}m}{3p_1^{2/3}p_2^{1/3}}$$

[1]También se podría haber integrado las demandas Hickssianas con respecto a su respectivo precio, y obtener primero, la función de gasto, y luego por dualidad, la función de utilidad indirecta

$$v(p,m) = \frac{4m^3}{27\,p_1^2\,p_2}$$

Finalmente, hallamos las demandas ordinarias aplicando la identidad de Roy. Primero calculamos las derivadas parciales:

$dv/dp_1 = -8m^3 / 27p_1^3p_2$

$dv/dp_2 = -4m^3 / 27p_1^2p_2^2$

$dv/dm = 12m^2 / 27p_1^2p_2$

Luego, se hacen los remplazos respectivos, y se simplifica así:

$$X_1 = -\frac{-8m^3 / 27p_1^3p_2}{12m^2 / 27p_1^2p_2} = \frac{2m}{3p_1}$$

$$X_2 = -\frac{-4m^3 / 27p_1^2p_2^2}{12m^2 / 27p_1^2p_2} = \frac{m}{3p_2}$$

b) Para hallar la función de utilidad, en las demandas ordinarias despejamos las relaciones:

$m/p_1 = 3x_1/2$ y $m/p_2 = 3x_2$

Luego, se reacomoda la función de utilidad indirecta, se remplazan estas relaciones, y se efectúa:

$$v(p,m) = \frac{4m^3}{27\,p_1^2\,p_2}$$

$$v(p,m) = \left(\frac{4}{27}\right)\left(\frac{m}{p_1}\right)\left(\frac{m}{p_1}\right)\left(\frac{m}{p_2}\right)$$

$v(p,m) = U = (4/27)\,(3x_1/2)(3x_1/2)(3x_2)$

$U = (4/27)(27/4)\,x_1^2\,x_2$

$$\boxed{U = x_1^2\,x_2}$$

2. Dadas las siguientes funciones de demanda compensada:

$$h_1(p,U) = \frac{3U\ p_2^{2/5}}{25\ p_1^{2/5}} \qquad\qquad h_2(p,U) = \frac{2U\ p_1^{3/5}}{25\ p_2^{3/5}}$$

a) Halle las demandas marshallianas
b) Determine la función de utilidad

Solución

a) Integrando cualquiera de las demandas compensadas con respecto a su precio respectivo –en este caso integramos h_1 – se obtiene la Función del gasto[2]

$$e(p,U) = \int \cdot \frac{3U\ p_2^{2/5}}{25\ p_1^{2/5}} dp_1$$

$$= \frac{3U\ p_2^{2/5}}{25} \int p_1^{-2/5}\ dp_1$$

$$= \frac{3U\ p_2^{2/5}}{25} \frac{p_1^{3/5}}{3/5}$$

$$= \frac{U\ p_1^{3/5} p_2^{2/5}}{5}$$

Luego, para obtener la FUI, se hace uso de las identidades U(X) ≡ v(p,m) y e(p, U) ≡ m, y se despeja:

$$e(p,U) \equiv m = \frac{v(p,m)\, p_1^{3/5}\ p_2^{2/5}}{5}$$

$$v(p,m) = \frac{5m}{p_1^{3/5}\ p_2^{2/5}}$$

---

[2] Como ejercicio, pruebe integrar h_2 y obtenga el mismo resultado.

Finalmente, se hallan las demandas ordinarias aplicando la identidad de Roy:

Previamente se hallan las derivadas parciales:

$$\frac{dv}{dp_1} = \frac{-3}{5}\,\frac{5m}{p_1^{8/5}\,p_2^{2/5}} = \frac{-3m}{p_1^{8/5}\,p_2^{2/5}}$$

$$\frac{dv}{dp_2} = \frac{-2}{5}\,\frac{5m}{p_1^{3/5}\,p_2^{7/5}} = \frac{-2m}{p_1^{3/5}\,p_2^{7/5}}$$

$$\frac{dv}{dm} = \frac{5}{p_1^{3/5}\,p_2^{2/5}}$$

Luego, se remplazan en las fórmulas respectivas:

$$x_1 = -\frac{\dfrac{-3m}{p_1^{8/5}\,p_2^{2/5}}}{\dfrac{5}{p_1^{3/5}\,p_2^{2/5}}} = \frac{3m}{5p_1}$$

$$x_2 = -\frac{\dfrac{-2m}{p_1^{3/5}\,p_2^{7/5}}}{\dfrac{5}{p_1^{3/5}\,p_2^{2/5}}} = \frac{2m}{5p_2}$$

c) Para hallar la función de utilidad; en las demandas hikssianas, se aplica la identidad Xi(p,m) ≡ hi(p,U), y se despejan las relaciones (p_1/p_2):

$$h_1 \equiv x_1 = \frac{3U\,p_2^{2/5}}{25\,p_1^{2/5}} \quad\Rightarrow\quad \frac{\boldsymbol{p}_1}{\boldsymbol{p}_2} = \left(\frac{3\boldsymbol{U}}{25\,\boldsymbol{x}_1}\right)^{5/2}$$

$$h_2 \equiv x_2 = \frac{2U\,p_1^{3/5}}{25\,p_2^{3/5}} \quad\Rightarrow\quad \frac{\boldsymbol{p}_1}{\boldsymbol{p}_2} = \left(\frac{25\,\boldsymbol{x}_2}{2\boldsymbol{U}}\right)^{5/3}$$

Luego se igualan, y se despeja U:

$$\left(\frac{3U}{25x_1}\right)^{5/2} = \left(\frac{25x_2}{2U}\right)^{5/3}$$

$$U^{5/2}U^{5/3} = \left(\frac{25x_2}{2}\right)^{5/3}\left(\frac{25x_1}{3}\right)^{5/2}$$

$$U^{25/6} = \left(\frac{25x_2}{2}\right)^{5/3}\left(\frac{25x_1}{3}\right)^{5/2}$$

$$U = \left(\frac{25x_2}{2}\right)^{(5/3)(6/25)}\left(\frac{25x_1}{3}\right)^{(5/2)(6/25)}$$

$$U = \left(\frac{25x_2}{2}\right)^{2/5}\left(\frac{25x_1}{3}\right)^{3/5}$$

$$U = \left(\frac{25x_2}{2}\right)^{2/5}\left(\frac{25x_1}{3}\right)^{3/5}$$

$$\boxed{U = 9.8\, x_1^{3/5} x_2^{2/5}}$$

3. Dada la siguiente función de utilidad:

$$U(x_1, x_2) = x_1 + Lnx_2$$

Hallar:

a) Las demandas Marshallianas
b) Las demandasHikssianas
c) La Function de utilidadindirecta
d) La Función del gasto
e) CompruebelasdemandasMarshallianas
f) CompruebalasdemandasHickssianas

Solución

a) Las demandas Marshallianas se hallan formulando y resolviendo el problema primal:

$$\begin{aligned} &Max. \quad x_1 + Ln\,x_2 \\ &sujeto\, a: \quad p_1x_1 + p_2x_2 = m \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{L = x_1 + Lnx_2 + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2)}$$

C.P.O.:

$$\frac{dL}{dx_1} = 1 - \lambda p_1 = 0 \quad \ldots(1)$$

$$\frac{dL}{dx_2} = \frac{1}{x_2} - \lambda p_2 = 0 \quad \ldots(2)$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = m - p_1x_1 - p_2x_2 \ldots(3)$$

de (1) y (2):

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p_2x_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{p_1}{p_2}} \quad \ldots(4)$$

Así, (4) viene a ser la demanda Marshalliana del bien x_2. Luego, reemplazando (4) en (3), y despejando, se obtiene la de x_1:

$$p_1x_1 + p_2\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = m$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{m - p_1}{p_1}}$$

b) Para hallar las demandas Hikssianas se plantea y resuelve el problema dual:

$$Min. \quad p_1x_1 + p_2x_2$$
$$sujeto\,a: \quad x_1 + Ln\,x_2 = U$$

$$L = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda(U - x_1 - Lnx_2)$$

$C.P.O.:$

$$\frac{dL}{dx_1} = p_1 - \lambda = 0 \qquad \ldots (1')$$
$$\frac{dL}{dx_2} = p_2 - \frac{\lambda}{x_2} = 0 \qquad \ldots (2')$$
$$\frac{dL}{d\lambda} = U - x_1 - Ln\,x_2 \qquad \ldots (3')$$

De (1) y (2):

$$p_2x_2 = p_1$$

$$\Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{p_1}{p_2}} \qquad \ldots (4')$$

Luego, reemplazando (4') en (3'), y despejando, obtenemos la otra demanda Hikssiana:

$$x_1 + Ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = U$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = U - Ln\frac{p_1}{p_2}}$$

c) Función de utilidad indirecta

Para hallarla, en la función de utilidad directa se aplica la dualidad, se reemplazan las demandas Marshallianas y, de ser posible, se reduce:

$$U(x_1, x_2) \equiv v(p,m) \quad = \quad x_1 + Ln\, x_2$$

$$\mathrm{v(p,m)} \quad = \left(\frac{\mathrm{m - p_1}}{\mathrm{p_1}}\right) + \mathrm{Ln}\left(\frac{\mathrm{p_1}}{\mathrm{p_2}}\right)$$

d) Función del gasto

Similarmente, tomando la FUI, aplicamos las equivalencias , y despejamos:

$$v(p,m) \equiv U = \left(\frac{m \equiv e(p,U) - p_1}{p_1}\right) + Ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

$$e(p,U) = p_1\left[U - Ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) + 1\right]$$

e) Comprobación de las demandas Marshallianas

Aplicando la Identidad de Roy:

$$x_i(p,m) = -\frac{\dfrac{dv(p,m)}{dp_i}}{\dfrac{dv(p,m)}{dm}}$$

Así:

$$v(p,m) = \left(\frac{m - p_1}{p_1}\right) + \mathrm{Ln}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

Derivando:

$$\frac{dv}{dp_1} = -\frac{m}{p_1^2} + \frac{1}{p_1}$$

$$\frac{dv}{dp_2} = -\frac{1}{p_2}$$

$$\frac{dv}{dm} = \frac{1}{p_1}$$

Entonces:

$$x_1 = -\frac{-\frac{m}{p_1^2} + \frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_1}} = \frac{m}{p_1} - 1$$

$$x_2 = -\frac{-\frac{1}{p_2}}{\frac{1}{p_1}} = \frac{p_1}{p_2}$$

f) Comprobación de las demandas Hikssianas

En este caso, se recurre al Lema de Sheppard:

$$h_i(p,U) = \frac{\partial e(p,U)}{\partial p_i}$$

Así, reordenando la Función del gasto:

$$e(p,U) = p_1\left[U - Ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) + 1\right]$$

$$= \quad p_1U - p_1Ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) + p_1$$

Derivando:

$$h_1 \;=\; \frac{\partial e}{\partial p_1} \;=\; U - \left(p_1\frac{1}{p_1} + Ln\,p_1 - Ln\,p_2\right) + 1$$

$$= \quad U - \not{1} - Lnp_1 + Lnp_2 + \not{1}$$

$$= \quad U - (Ln\,p_1 - Ln\,p_2)$$

$$\boxed{h_1 = \quad U - Ln\frac{p_1}{p_2}}$$

$$h_2 = \frac{de}{dp_2} \;=\; p_1\frac{1}{p_2}$$

$$\boxed{h_2 = \frac{p_1}{p_2}}$$

4. Un consumidor tiene un ingreso de S/ 900, consume dos bienes, x_1 y x_2, cuyos precios son $p_1 = 2$ y $p_2 = 10$, respectivamente. Si su función de utilidad es:

$$U(x_1, x_2) = 4x_1^{0,5} + x_2$$

Se pide:

a) Hallar la máxima utilidad que alcanza el consumidor. Grafique
b) Demostrar que U(X) ≡v(P,m)
c) Compruebe el Lema de Shephard

Solución

a) Hallar la máxima utilidad implica conocer, primero, las demandas óptimas, a través del problema primal:

$$\begin{aligned} &Maxim. \quad 4x_1^{0,5} + x_2 \\ &sujeto\ a: \quad p_1x_1 + p_2x_2 = m \end{aligned}$$

$$L = 4x_1^{0,5} + x_2 + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2)$$

$$C.P.O.:$$

$$\frac{dL}{dx_1} = 2x_1^{-0,5} - \lambda p_1 = 0 \quad \ldots(1)$$

$$\frac{dL}{dx_2} = 1 - \lambda p_2 = 0 \quad \ldots(2)$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = m - p_1x_1 - p_2x_2 \quad \ldots(3)$$

$$Luego \quad (1)/(2):$$

$$\frac{2x_1^{-0,5}}{1} = \frac{\lambda p_1}{\lambda p_2}$$

$$x_1^{-0,5} = \frac{p_1}{2p_2}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \left(\frac{2p_2}{p_1}\right)^2$$

Remplazando x_1 en la restricción presupuestaria, reduciendo y despejando, se obtiene la función de demanda del bien x_2:

$$p_1\left(\frac{2p_2}{p_1}\right)^2 + p_2x_2 = m$$

$$\frac{4p_2^{\,2}}{p_1} + p_2x_2 = m$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{4p_2}{p_1}$$

Por último, se remplazan los datos en las funciones y se obtienen las demandas óptimas y la utilidad máxima:

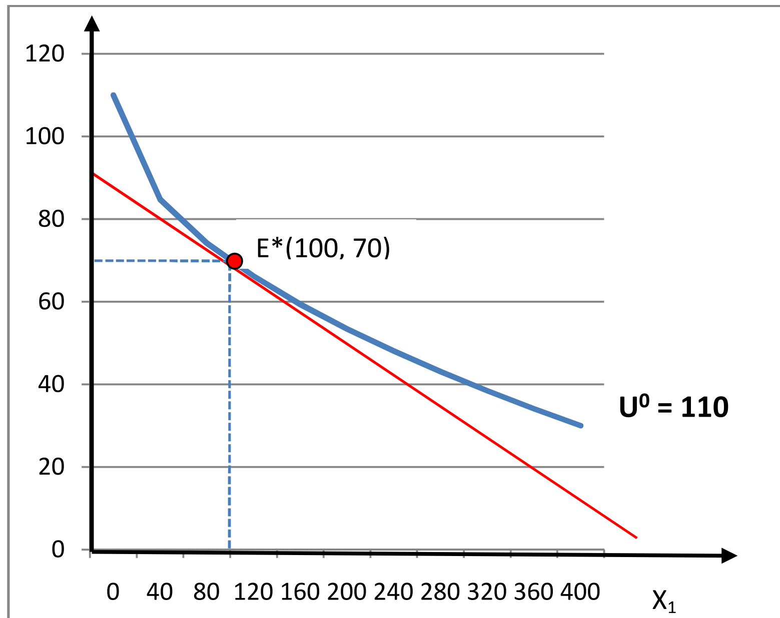
$$x_1 = \left(\frac{2(10)}{2}\right)^2 = 100$$

$$x_2 = \frac{900}{10} - \frac{4(10)}{2} = 70$$

Entonces:

$$U^* = 4(100)^{0,5} + 70 = 110$$

Gráfico: Equilibrio del consumidor



b) Para esta demostración se requiere hallar v(P, m). Así remplazando las demandas Marshallianas en la función de utilidad, y simplificando:

$$v(P,m) = 4\left[\left(\frac{2p_2}{p_1}\right)^2\right]^{0,5} + \left(\frac{m}{p_2} - \frac{4p_2}{p_1}\right)$$

$$v(P,m) = 4\left(\frac{2p_2}{p_1}\right) + \left(\frac{m}{p_2} - \frac{4p_2}{p_1}\right)$$

$$v(P,m) = \frac{4p_2}{p_1} + \frac{m}{p_2}$$

Luego, remplazando los datos:

$$v(P,m) = \frac{4(10)}{2} + \frac{900}{10}$$

$$v(P,m) = 110$$

Como se puede observar, comparando con lo hallado en a), se comprueba que U(X) ≡ v(P, m).

c) Lema de Shephard

Primero se tiene que hallar las demandas compensadas para luego aplicar el Lema de Shephard

Entonces:

$$\begin{aligned} Min. \quad & p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ sujeto\, a: \ & 4x_1^{0,5} + x_2 = U \end{aligned}$$

$$L = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \lambda(U - 4x_1^{0,5} - x_2)$$

$C.P.O.:$

$$\frac{dL}{dx_1} = p_1 - \lambda\, 2x_1^{-0,5} = 0 \quad \ldots (1')$$

$$\frac{dL}{dx_2} = p_2 - \lambda = 0 \quad \ldots (2')$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = U - 4x_1^{0,5} - x_2 = 0 \quad \ldots (3')$$

La demanda compensada del bien x_1, se obtiene dividiendo (1')/ (2'), y reduciendo:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\lambda 2x_1^{-0,5}}{\lambda}$$

$$x_1^{-0,5} = \frac{p_1}{2p_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = \left(\frac{2p_2}{p_1}\right)^2} \qquad \ldots(4')$$

Luego, remplazando (4') en (3'), reduciendo y despejando, obtenemos la demanda Hikssiana del bien x_2:

$$4\left[\left(\frac{2p_2}{p_1}\right)^2\right]^{0,5} + x_2 = U$$

$$\frac{8p_2}{p_1} + x_2 = U$$

$$\Rightarrow \boxed{x_2 = U - 8\frac{p_2}{p_1}}$$

Ahora, falta la función del gasto; entonces, remplazando las demandas Hickssianas en la restricción presupuestaria, y aplicando las equivalencias de la dualidad :

$$m \equiv e(P,U) = p_1\left(\frac{2p_2}{p_1}\right)^2 + p_2\left(U - \frac{8p_2}{p_1}\right)$$

$$e(P,U) = \frac{4p_2^{\,2}}{p_1} + p_2U - \frac{8p_2^{\,2}}{p_1}$$

$$\boxed{e(P,U) = p_2U - \frac{4p_2^{\,2}}{p_1}}$$

Por último, recurriendo al Lema de Shephard:

$$h_i(p,U) = \frac{de(p,U)}{dp_i}$$

Aplicando:

$$h_1 = \frac{de}{dp_1} = \frac{4p_2^{\ 2}}{p_1^{\ 2}} = \left(\frac{2p_2}{p_1}\right)^2$$

$$h_2 = \frac{de}{dp_2} = U - 8\frac{p_2}{p1}$$

5. Un consumidor tiene la función de utilidad siguiente:

$$U(x_1, x_2) = \ln x_1 + \ln(x_2 + 4)$$

Si su renta monetaria es 2,520, y los precios de los bienes que consume son p_1= 2 y p_2=4, demuestre:

a) Que las demandas de ambos bienes pueden ser calculadas a través de las funciones de Demanda Marshalliana o de las funciones de Demanda Hiksiana.
b) El Lema de Shephard
c) Que la renta monetaria se puede obtener a través de la función de gasto.

Solución

a) Las funciones de demanda marshalliana se hallan a través del problema primal:

$$\begin{aligned} &Max. \quad \ln x_1 + \ln(x_2 + 4) \\ &s.a: \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \end{aligned}$$

$$\ell: \quad \ln x_1 + \ln(x_2 + 4) + \lambda(m - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

C.P.O.:

$$\partial \ell / \partial x_1 = \frac{1}{x_1} - \lambda p_1 = 0 \qquad \ldots (1)$$

$$\partial \ell / \partial x_2 = \frac{1}{x_2 + 4} - \lambda p_2 = 0 \qquad \ldots (2)$$

$$\partial \ell / \partial \lambda = m - p_1 x_1 + p_2 x_2 = 0 \qquad \ldots (3)$$

De (1) y (2):

$$\frac{x_2 + 4}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

Entonces, obtenemos las relaciones entre las variables

$$x_2 = \frac{p_1 x_1}{p_2} - 4 \qquad \ldots (4) \qquad\qquad x_1 = \frac{p_2 (x_2 + 4)}{p_1} \qquad \ldots (5)$$

Luego, reemplazando(4) en la R.P, reduciendo y despejando, obtenemos la demanda marshallliana de x_1:

$$p_1 x_1 + p_2 \left(\frac{p_1 x_1}{p_2} - 4 \right) = m$$

$$p_1 x_1 + p_1 x_1 - 4 p_2 = m$$

$$\boxed{x_1 = \frac{m + 4 p_2}{2 p_1}}$$

Reemplazando los datos, se obtiene la demanda de x_1 :

$$x_1 = \frac{2.520 + 4(4)}{2(2)}$$

$$x_1 = \frac{2{,}536}{4}$$

$$x_1 = 634$$

La función de demanda Marshalliana de x_2 se obtiene, de manera similar, reemplazando (5) en la restricción:

$$p_1\left(\frac{p_2(x_2+4)}{p_1}\right) + p_2x_2 = m$$

$$p_2x_2 + 4p_2 + p_2x_2 = m$$

$$\boxed{x_2 = \frac{m-4p_2}{2p_2}}$$

La cantidad consumida de este bien será:

$$x_2 = \frac{2.520 - 4(4)}{2(4)}$$

$$= \frac{2.504}{8}$$

$$x_2 = 313$$

Luego, para hallar las funciones de demanda Hiksiana, formulamos el problema dual:

$$\begin{aligned} &Min. \quad p_1x_1 + p_2x_2 \\ &s.a: \quad \ln x_1 + \ln(x_2+4) = U \end{aligned}$$

$$\ell: \quad p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda[U - \ln x_1 - \ln(x_2+4)]$$

C.P.O.:

$$\partial \ell / \partial x_1 = p_1 - \lambda \frac{1}{x_1} = 0 \quad \ldots (1)$$

$$\partial \ell / \partial x_2 = p_2 - \lambda \frac{1}{x_2 + 4} = 0 \quad \ldots (2)$$

$$\partial \ell / \partial \lambda = U - \ln x_1 - \ln(x_2 + 4) = 0 \quad \ldots (3)$$

De (1) y (2):

$$\frac{x_2 + 4}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

Entonces, obtenemos las relaciones entre las variables

$$x_2 = \frac{p_1 x_1}{p_2} - 4 \quad \ldots(4) \qquad\qquad x_1 = \frac{p_2 (x_2 + 4)}{p_1} \quad \ldots(5)$$

Seguidamente, se remplaza(4) en la restricción, reduciendo y despejando, se obtiene la demanda Hiksiana de x_1:

$$U = \ln x_1 + \ln\left[\frac{p_1 x_1}{p_2} - 4 + 4\right]$$

$$U = \ln \frac{p_1}{p_2} x_1^{\ 2}$$

$$\frac{p_1}{p_2} x_1^{\ 2} = e^U$$

$$x_1^{\ 2} = \frac{p_2}{p_1} e^U$$

$$\boxed{x_1^{\ h} = \left(\frac{p_2}{p_1} e^U\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Recurriendo a los datos, hallamos que el consumo del bien x_1, hallado con la función de demanda Marshalliana, coincide con el de la demanda Hicksiana[3]:

$$x_1^h = \left(\frac{4}{2} e^{12,21095}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_1^h = (401.956)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_1^h = 634$$

Del mismo modo, reemplazando (5), reduciendo y despejando, obtenemos la función de demanda Hiksiana de x_2:

$$U = \ln\left[\frac{p_2(x_2+4)}{p_1}\right] + \ln[x_2+4]$$

$$U = \ln\left[\frac{p_2}{p_1}(x_2+4)(x_2+4)\right]$$

$$U = \ln\left[\frac{p_2}{p_1}(x_2+4)^2\right]$$

$$e^U = \frac{p_2}{p_1}(x_2+4)^2$$

$$(x_2+4) = \left(\frac{p_1}{p_2} e^U\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2^h = \left(\frac{p_1}{p_2} e^U\right)^{\frac{1}{2}} - 4$$

---

[3] Previamente calculamos U = ln(634)+ ln(313 +4) = 6,452 + 5,7589 = 12,21095

Remplazando, datos:

$$x_2{}^h = \left(\frac{2}{4}e^{12,21095}\right)^{\frac{1}{2}} - 4$$

$$x_2{}^h = (0,5(200.977,85))^{\frac{1}{2}} - 4$$

$$x_2{}^h = 313$$

Por tanto, se demuestra que $X_i\,(P,m) \equiv X_i^h(P,U)$

b) La demostración del Lema de Shephard requiere conocer, previamente, la Función de gasto. Para hallar ésta, se deben reemplazar las funciones de demanda Hiksiana en la restricción presupuestaria, y reducir:

$$e(P,U) \equiv m = p_1\left[\frac{p_2}{p_1}e^U\right]^{\frac{1}{2}} + p_2\left[\left(\frac{p_1}{p_2}e^U\right)^{\frac{1}{2}} - 4\right]$$

$$e(P,U) = (p_1p_2e^U)^{\frac{1}{2}} + (p_1p_2e^U)^{\frac{1}{2}} - 4p_2$$

$$\boxed{e(P,U) = 2\,(p_1p_2e^U)^{\frac{1}{2}} - 4p_2}$$

<u>Lema de Shephard</u>:

$$X_i{}^h(P,U) = \frac{\partial e(P,U)}{\partial p_i}$$

Se sabe que:

$$e(P,U) = 2\,(p_1p_2e^U)^{\frac{1}{2}} - 4p_2$$

Entonces,

$$X_1{}^h = \frac{\partial e}{\partial p_1} = \frac{2}{2}(p_2e^U)^{\frac{1}{2}}\,p_1^{-\frac{1}{2}}$$

$$X_1{}^h = \left(\frac{p_2e^U}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$X_2^h = \frac{\partial e}{\partial p_2} = \frac{2}{2}(p_1 e^U)^{\frac{1}{2}} p_2^{-\frac{1}{2}} - 4$$

$$X_2^h = \left(\frac{p_1 e^U}{p_2}\right)^{\frac{1}{2}} - 4$$

c) Demostración de que U(x)≡v(P,m). Se sabe que U(x)= 12,21095. Entonces, se halla v(P,m), para lo cual se remplazan las funciones de demanda Marshalliana en la función de utilidad directa, y se reduce:

$$U(x_1; x_2) \equiv v(p,m) \quad = \quad \ln\left[\frac{m+4p_2}{2p_1}\right] + \ln\left[\frac{m-4p_2}{2p_2} + 4\right]$$

$$v(p,m) \quad = \quad \ln\left[\frac{m+4p_2}{2p_1}\right] + \ln\left[\frac{m+4p_2}{2p_2}\right]$$

Finalmente:

$$v(p,m) \quad = \quad \ln\left[\frac{(m+4p_2)^2}{4p_1 p_2}\right]$$

Reemplazando los datos:

$$v(p,m) = \quad \ln\left[\frac{[2.520+4(4)]^2}{4(2)(4)}\right]$$

$$v(p,m) = \quad \ln\left[\frac{6.431.296}{32}\right]$$

$$v(p,m) = \ln(200.978)$$

$$v(p,m) \; = \; 12{,}21095 \qquad l.q.q.d.$$

6. Un nadador tiene una dieta basada en pescado y ensaladas en la proporción de ½ kg. de pescado por cada 2 kg. de ensaladas. Su utilidad sólo se incrementa cuando consume más de ambos alimentos en las proporciones indicadas. Con esta información:

a) Formule la función de producción

b) Determine la senda de expansión

c) Si desea consumir 2 Kg. de pescado ¿cuánto tendrá que consumir de ensaladas?¿Cuál será el nivel de utilidad que alcanza?. Grafique.

Solución

a) Para esta persona, el pescado y las ensaladas son bienes complementarios perfectos, por tanto la función de utilidad tendrá la forma:

$$U = \text{Mín. } (ax_1, bx_2)$$

Donde:

x_1: pescado (Kg.)
x_2: ensalada (Kg.)
a :

x_1	U
½Kg —	1
1Kg —?	

a = 2

b :

x_2	U
2Kg —	1
1Kg —?	

b = 1/2

$$\rightarrow \quad U = \text{Mín. } (2x_1, ½x_2)$$

b) La senda de expansión en el consumo viene a ser la trayectoria de la curva renta consumo, la cual se obtiene de la relación:

$$\tfrac{1}{2}x_2 = 2x_1$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 4x_1$$

c) Si consume 2Kg de pescado, x_1= 2, entonces, de acuerdo a sus preferencias, la ración de verduras (x_2) que tendrá que consumir será:

$$x_2 = 4(2) = 8 \text{ Kg.}$$

La utilidad que alcanza:

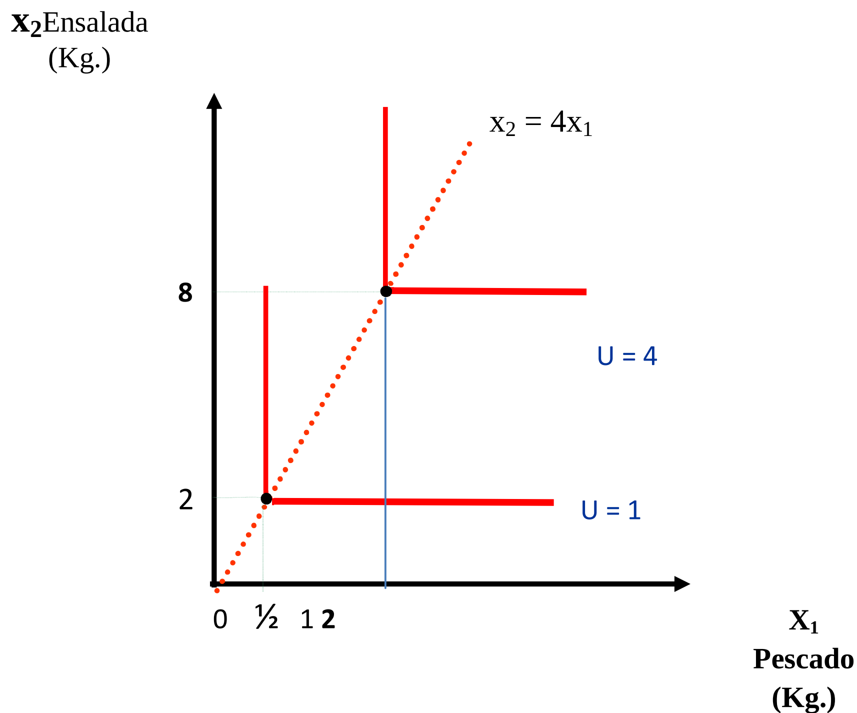
$$U = \text{Mín. } [2(2), ½(8)]$$

$$U = \text{Mín. } [4; \ 4]$$

O sea:

$$U = 4$$

Gráfico:



7. Alberto Fernández es un amante de los animales, tiene una predilección especial e igual por las gallinas y los zorros, de exhibición, de tal manera que su función de utilidad es la siguiente:

$$U = Max.\ (x_1;\ x_2)$$

Tiene un galpón donde piensa criar las especies de su preferencia, dependiendo de los precios de mercado. Si Beto cuenta con un ingreso de S/.1600 y el precio de una gallina ornamental es de S/150, mientras que los zorros se venden a S/200 cada ejemplar, determine:

a) El equilibrio de Beto
b) Si el precio de las gallinas sube a S/225 ¿qué criará Beto?
c) Si el precio de los zorros también se elevase a S/225 ¿cuál sería su decisión?

Solución

a) La función de utilidad de Beto denota el caso de bienes sustitutos perfectos que no pueden ser consumidos simultáneamente o no brindan la misma utilidad cuando se consumen juntos

La senda de expansión es:

$$x_2 = 1x_1$$

La restricción presupuestaria:

$$150x_1 + 200x_2 = 1800$$

Entonces,

$$\text{como} \quad \frac{p_1}{p_2} < \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \text{el equilibrio:} \quad \left(\frac{m}{p_1}; 0\right)$$

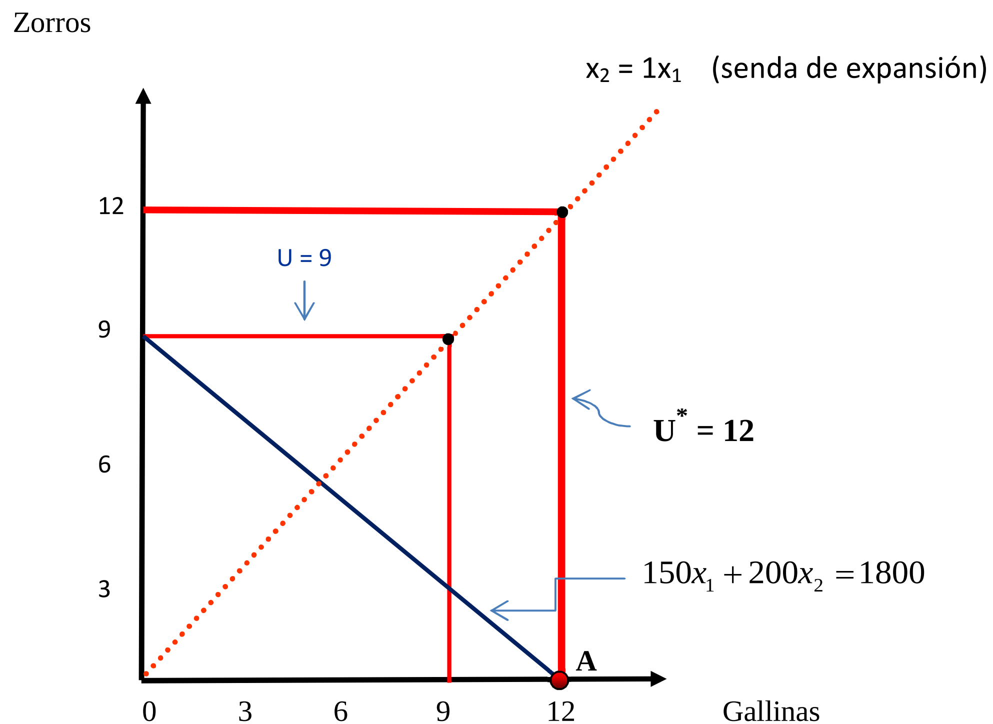
Así

$$\frac{150}{200} < \frac{1}{1} \quad \Rightarrow \quad \textbf{equilibrio:} \quad \mathbf{A}(12; 0)$$

Es decir, obtendrá la máxima utilidad criando 12 gallinas y ningún zorro.

Gráfico[4]

$$U = Max.\ (x_1;\ x_2)$$



[4] Esta función tiene curvas de indiferencia rectangulares similar a las de bienes complementarios perfectos, pero como se trata de bienes sustitutos perfectos, su trazo es exactamente opuesto.

b) Si sube el precio de las gallinas, la nueva restricción presupuestaria será:

$$225x_1 + 200x_2 = 1800$$

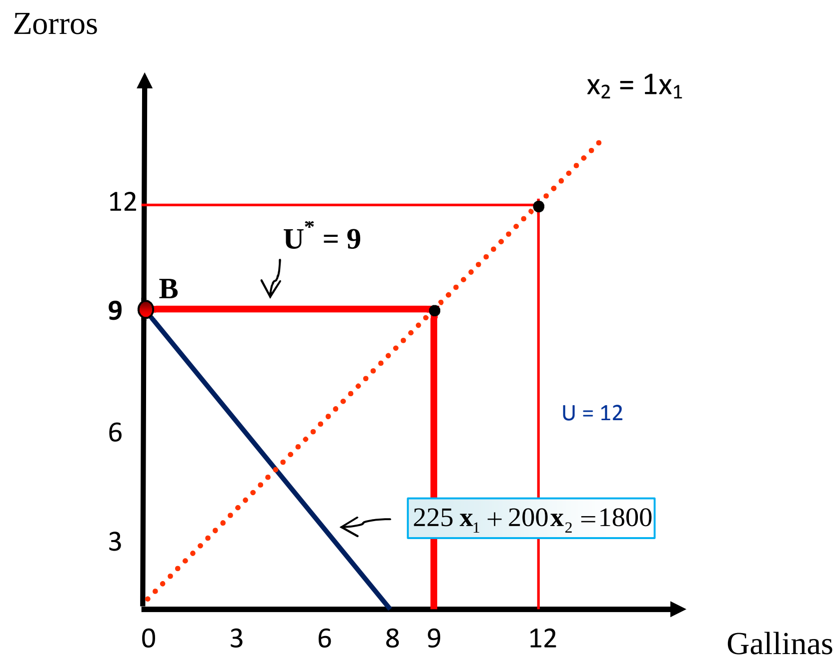
En este caso

$$\frac{p_1}{p_2} > \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \text{equilibrio:} \quad \left(0; \frac{m}{p_2}\right)$$

Entonces,

$$\frac{225}{200} > \frac{1}{1} \quad \Rightarrow \quad \textbf{equilibrio:} \quad \mathbf{B}\,(0;9)$$

Gráfico



En este caso, se encontrará en equilibrio comprando 8 zorros y ninguna gallina

8. Luis Valverde es un experto catador de Pisco Sour, pero su paladar sólo disfruta con la combinación exacta 3-2, es decir, 3 onzas de pisco con 2 onzas de limón. Luchito tiene un ingreso de S/. 1.200. Si el precio de la onza de pisco es de S/. 3,00, y el de limón, S/. 1,50; determine:

a) La función de utilidad
b) El consumo óptimo de Juan. Grafique
c) El nivel de utilidad

Solución:

a) Las preferencias de consumo de Luis describen a dos bienes complementarios perfectos, así la función de utilidad es:

$$U = Mín\left(\frac{x_1}{3}, \frac{x_2}{2}\right)$$

b) El consumo óptimo implica hallar las funciones de demanda

Si $$\frac{\mathbf{x}_1}{3} = \frac{\mathbf{x}_2}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_2 = \frac{2}{3}\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{y}$$

$$\mathbf{x}_1 = \frac{3}{2}\mathbf{x}_2$$

Reemplazando x_2 en la recta de balance, factorizando y despejando, se obtiene:

$$p_1 x_1 + p_2\left(\frac{2}{3}x_1\right) = m$$

$$x_1\left(p_1 + \frac{2}{3}p_2\right) = m$$

$$x_1 = \frac{m}{p_1 + \frac{2}{3}p_2}$$

De modo similar, se obtiene x_2:

$$p_1\left(\frac{3}{2}x_2\right) + p_2x_2 = m$$

$$x_2\left(\frac{3}{2}p_1 + p_2\right) = m$$

$$x_2 = \frac{m}{3/2\, p_1 + p_2}$$

Finalmente, se reemplazan los datos y se obtiene la canasta óptima (300, 200)

$$x_1 = \frac{1.200}{3 + 2/3\,(1{,}5)} = \frac{1.200}{4} = 300$$

$$x_2 = \frac{1.200}{3/2\,(3) + 1{,}5} = \frac{1.200}{6} = 200$$

c) El nivel de utilidad óptimo se obtiene reemplazando las funciones de demanda marshalliana en la función de utilidad directa, reduciendo y seleccionando la que representa la demanda mínima.

$$\mathbf{U} = \mathbf{Mín}\,.\left(\frac{\dfrac{\mathbf{m}}{\mathbf{p}_1 + 2/3\,\mathbf{p}_2}}{3}, \frac{\dfrac{\mathbf{m}}{3/2\,\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}}{2}\right)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{Mín}\,.\left(\frac{\mathbf{m}}{3\mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2}, \frac{\mathbf{m}}{3\mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2}\right)$$

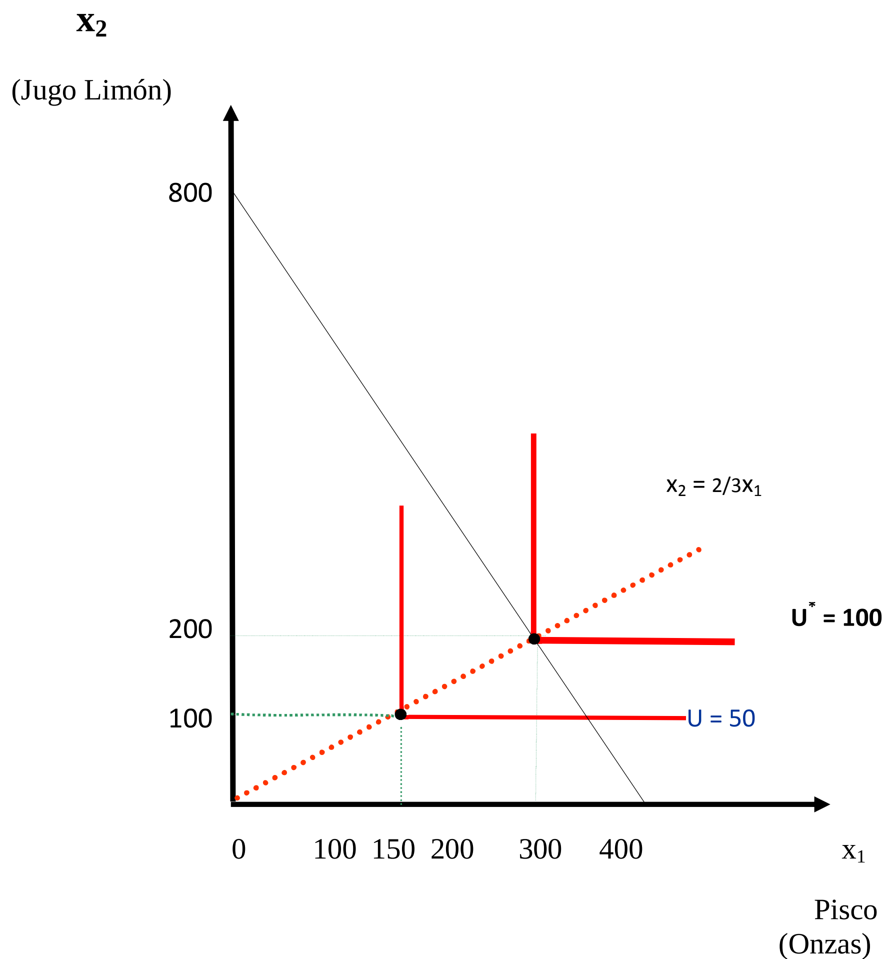
Entonces, dado que los componentes son iguales, se toma cualquiera de ellas y se reemplazan los datos:

$$U = \frac{m}{3p_1 + 2p_2}$$

$$\mathbf{U} = \frac{1.200}{3(3) + 2(1,5)}$$

$$\mathbf{U}^* = 100$$

Gráfico



9. A Juan Rosado le gusta mucho el pan con pejerrey, sus caseros del Callao saben que, como mínimo, él siempre prefiere dos pejerreyes por cada uno de los tantos panes con pejerrey que consume.

Determine:

a) Las demandas marshallianas de los bienes consumidos por Juan
b) Las demandas compensadas de ambos bienes
c) La función de utilidad indirecta
d) La función de gasto
e) Las demandas marshallianas a través de la Proposición de Roy
f) Las demandas compensadas a través del Lema de Sheppard

Solución

a) Las preferencias de este consumidor muestran una relación de complementariedad perfecta entre los bienes. Así, si x_1 = pan y x_2 = pejerrey, su función de utilidad, según el enunciado, será:

$$U = \text{Mín.}\ (x_1, \tfrac{1}{2}\, x_2)$$

Se sabe que:

$U = x_1$ y que: $U = \frac{1}{2}\, x_2$

De estas igualdades se obtienen dos relaciones:

$\rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}\, x_2 \ \ldots (\alpha)$ y

$x_2 = 2x_1 \ \ldots (\beta)$

Para hallar la demanda marshalliana de x_1, reemplazamos (β) en la restricción presupuestaria:

$$p_1x_1 + p_2(2x_1) = m$$

$$x_1\ (p_1 + 2p_2) = m$$

$$x_1 = \frac{m}{p_1 + 2p_2}$$

Para obtener la otra demanda, se remplaza (α) en la restricción presupuestaria:

$$p_1(\tfrac{1}{2}\, x_2) + p_2 x_2 = m$$

$$p_1 x_2 + 2p_2 x_2 = 2m$$

$$x_2\,(p_1 + 2p_2) = 2m$$

$$x_2 = \frac{2m}{p_1 + 2p_2}$$

b) Para obtener las demandas compensadas o Hikssianas planteamos el problema dual:

$$\begin{aligned} &Min.\quad p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ &s.a:\quad Mín.(x_1,\ \tfrac{1}{2} x_2) = \overline{U} \end{aligned}$$

Luego, reemplazando (β) en la restricción:

$$Mín\,(x_1,\ 2x_1) = \overline{U}$$

Entonces, tomando el mínimo:

$$x_1(p, \overline{U}) = \overline{U}$$

Similarmente, al remplazar (α) en la restricción:

$$Mín\,(\tfrac{1}{2} x_2,\ x_2) = \overline{U}$$

Entonces:

$$\tfrac{1}{2}\, x_2 = \overline{U}$$

$$x_2(p, \overline{U}) = 2\overline{U}$$

c) La Función de utilidad indirecta se obtiene remplazando las demandas ordinarias en la Función de utilidad directa:

$$U = Mín.\left[\frac{m}{p_1 + 2p_2},\ (1/2)\frac{2m}{p_1 + 2p_2}\right]$$

Luego, se toma el menor pero como ambos componentes son iguales:

$$v(P, m) = \frac{m}{p_1 + 2p_2}$$

d) La función de gasto se halla aplicando la dualidad, partiendo de la FUI, y despejando. Así:

$$\bar{\mathbf{U}} = \frac{\mathbf{e}(\mathbf{P}, \bar{\mathbf{U}})}{\mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2}$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{U}}) = \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2)$$

e) Aplicando la Proposición de Roy

$$x_1 = -\frac{\partial v(P, m)/\partial p_1}{\partial v(P, m)/\partial m} \qquad x_2 = -\frac{\partial v(P, m)/\partial p_2}{\partial v(P, m)/\partial m}$$

Primero se hallan las derivadas requeridas:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{p}_1} = -\frac{\mathbf{m}}{(\mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2)^2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{p}_2} = -\frac{2\mathbf{m}}{(\mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2)^2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{m}} = \frac{1}{(\mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2)}$$

Luego se remplazan en las fórmulas respectivas:

$$\mathbf{x}_1(\mathbf{P},\mathbf{m}) = -\frac{-\dfrac{\mathbf{m}}{(\mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2)^2}}{\dfrac{1}{(\mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2)}}$$

$$= \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2}$$

$$\mathbf{x}_2(\mathbf{P},\mathbf{m}) = -\frac{-\dfrac{2\mathbf{m}}{(\mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2)^2}}{\dfrac{1}{(\mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2)}}$$

$$= \frac{2\mathbf{m}}{\mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2}$$

f) Aplicando Sheppard

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{h}_1(\mathbf{P},\overline{\mathbf{U}}) = \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{P},\overline{\mathbf{U}})}{\partial \mathbf{p}_1}$$

$$\mathbf{h}_1(\mathbf{P},\overline{\mathbf{U}}) = \overline{\mathbf{U}}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{h}_2(\mathbf{P},\overline{\mathbf{U}}) = \frac{\partial \mathbf{e}(\mathbf{P},\overline{\mathbf{U}})}{\partial \mathbf{p}_2}$$

$$\mathbf{h}_2(\mathbf{P},\overline{\mathbf{U}}) = 2\overline{\mathbf{U}}$$

10. Dada la siguiente función de utilidad:

$$U = Mín.\,[x_1;\; x_2]^{\frac{1}{2}}$$

a) Demuestre la Proposición de Roy
b) Demuestre el Lema de Sheppard

Solución:

a) Para demostrar Roy, primero se tiene que contar con la Función de utilidad indirecta, y ésta, a su vez, requiere de las demandas marshallianas.
Partiendo de:

$$x_1^{1/2} = x_2^{1/2}$$

se establece que: $x_1 = x_2$

Entonces, para obtener $x_1(p,m)$, se remplaza esta relación en la restricción presupuestaria, se factoriza y despeja:

$$p_1 x_1 + p_2 x_1 = m$$

$$x_1(p_1 + p_2) = m$$

$$x_1 = \frac{m}{p_1 + p_2}$$

De forma análoga, x_2 resulta ser:

$$x_2 = \frac{m}{p_1 + p_2}$$

Remplazando en la función de utilidad directa:

$$U = Mín.\left[\frac{m}{p_1 + p_2};\; \frac{m}{p_1 + p_2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Entonces:

$$v(P,m) = \left[\frac{m}{p_1 + p_2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Luego hay que hallar las demandas marshallianas a través de:

$$x_1 = -\frac{\partial \mathrm{v(P, m)} / \partial \mathrm{p}_1}{\partial \mathrm{v(P, m)} / \partial \mathrm{m}} \qquad \text{y} \qquad x_2 = -\frac{\partial \mathrm{v(P, m)} / \partial \mathrm{p}_2}{\partial \mathrm{v(P, m)} / \partial \mathrm{m}}$$

Para facilitar las derivaciones, hacemos que:

$$v(P,m) = \left[\frac{m}{p_1 + p_2}\right]^{\frac{1}{2}} = m^{1/2}(p_1 + p_2)^{-1/2}$$

Luego se aplican las fórmulas respectivas y se reduce:

$$x_1(P,m) = -\frac{-\frac{1}{2}m^{1/2}(p_1 + p_2)^{-3/2}}{\frac{1}{2}m^{=1/2}(p_1 + 2p_2)^{-1/2}} = \frac{m^{1/2+1/2}}{(p_1 + p_2)^{3/2-1/2}} = \frac{m}{p_1 + p_2}$$

$$x_2(P,m) = -\frac{-\frac{1}{2}m^{1/2}(p_1 + p_2)^{-3/2}}{\frac{1}{2}m^{=1/2}(p_1 + 2p_2)^{-1/2}} = \frac{m^{1/2+1/2}}{(p_1 + p_2)^{3/2-1/2}} = \frac{m}{p_1 + p_2}$$

b) Demostración del Lema de Sheppard

Este Lema afirma que lafunción de demanda Hiksiana de un bien es igual a la derivada de la función gasto respecto al precio de dicho bien. Así:

$$h_1(P,\overline{U}) = \frac{\partial e(P,\overline{U})}{\partial p_1} \qquad\qquad h_2(P,\overline{U}) = \frac{\partial e(P,\overline{U})}{\partial p_2}$$

Entonces, dado que no se conocen las funciones de demanda Hikssiana, hay que hallarlas empleando la relación $x_2 = x_1$;remplazándola en la función de utilidad directa:

Para x_1:

$$Mín.[x_1;\ x_1]^{\frac{1}{2}} = \overline{U}$$

Entonces,

$$x_1^{\frac{1}{2}} = \overline{U}$$

$$x_1 = \overline{U}^2$$

Para x_2:

$$Mín.[x_2;\ x_2]^{\frac{1}{2}} = \overline{U}$$

Entonces,

$$x_2^{\frac{1}{2}} = \overline{U}$$

$$x_2 = \overline{U}^2$$

Dado que $x_i \equiv h_i$ estas funciones se pueden expresar como:

$$h_1(P, U) = \overline{U}^2 \qquad h_2(P, U) = \overline{U}^2$$

Luego, también hay que contar con la función de gasto. Entonces, a partir de la FUI:

$$v(P, m) = \left[\frac{m}{p_1 + p_2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Se recurre a v(P,m) ≡ U y m ≡ e(P,U), y se despeja:

$$\overline{U} = \left[\frac{e(P, \overline{U})}{p_1 + p_2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$e(P, \overline{U}) = \overline{U}^2 (p_1 + p_2)$$

Finalmente,

$$h_1(P,\overline{U}) = \frac{\partial\left[\overline{U}^2(p_1+p_2)\right]}{\partial p_1} = \overline{U}^2$$

$$h_2(P,\overline{U}) = \frac{\partial\left[\overline{U}^2(p_1+p_2)\right]}{\partial p_2} = \overline{U}^2$$

12.- Las preferencias de un consumidor se expresan mediante la función de utilidad:

$$U(x_1, x_2) = \text{Mín.}\ (3x_1+x_2,\ x_1+2x_2)$$

a) Halle las funciones de demanda marshalliana u ordinaria.
b) Si el consumidor tiene un ingreso monetario de S/. 1.200, y los precios de los bienes que consume son $p_1 = 2$ y $p_2 = 3$ ¿cuál es el nivel de utilidad que alcanzaría?. Grafique el equilibrio.
c) A partir del equilibrio de b), halle el nuevo equilibrio cuando el precio de x_1 cae a $p_1' = 1$. Grafique.

Solución

a) En este tipo de funciones se cumple que:

$$U = 3x_1+x_2 \quad \text{y} \quad U = x_1+2x_2,$$

Igualando, $3x_1+x_2= x_1+2x_2$

Reduciendo, se obtienen las relaciones:

$$x_1 = ½\, x_2 \qquad x_2 = 2x_1$$

Remplazando estas relaciones –una a la vez- en la restricción presupuestaria, se hallan las funciones de demanda ordinaria:

$\rightarrow$ $p_1(½\, x_2) + p_2x_2 = m$

$$x_2\left(\frac{p_1 + 2p_2}{2}\right) = m$$

$$x_2 = \frac{2m}{p_1 + 2p_2}$$

$\rightarrow$ $p_1x_1 + p_2(2x_1) = m$

$$x_1(p_1 + 2p_2) = m$$

$$x_1 = \frac{m}{p_1 + 2p_2}$$

b) Se hallan las cantidades demandadas de cada bien remplazando los datos en las respectivas funciones de demanda:

$$x_1 = \frac{1200}{2 + 2(3)} = 150 \qquad x_2 = \frac{2(1200)}{2 + 2(3)} = 300$$

Luego, éstas se remplazan en la función de utilidad, obteniéndose:

$$U = \text{Mín.}\ (750,\ 750)$$

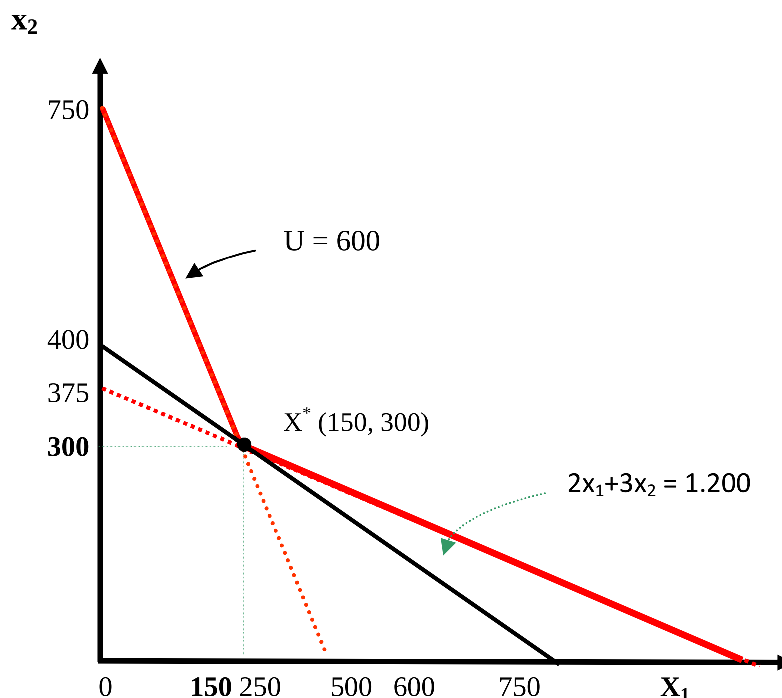
Entonces, $U = 750$

Gráfico. La representación gráfica de la función de utilidad se obtendrá de las ecuaciones del sistema:

$$\begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 = 750 \\ x_1 + 2x_2 = 750 \end{bmatrix}$$

La curva de indiferencia, formada por porciones de estas dos rectas, tiene un ángulo obtuso, y se intercepta con los ejes.

Las rectas se cruzan cuando se da la relación: $x_2 = 2x_1$.



c) Cuando p_1 cae a 1, el instrumental analítico convencional para hallar el equilibrio muestra una incongruencia, veamos porque:

Las demandas serían:

$$x_1 = \frac{1200}{1+2(3)} = 171.4 \qquad x_2 = \frac{2(1200)}{1+2(3)} = 342.9$$

Luego, éstas se reemplazarían en la función de utilidad, obteniéndose:

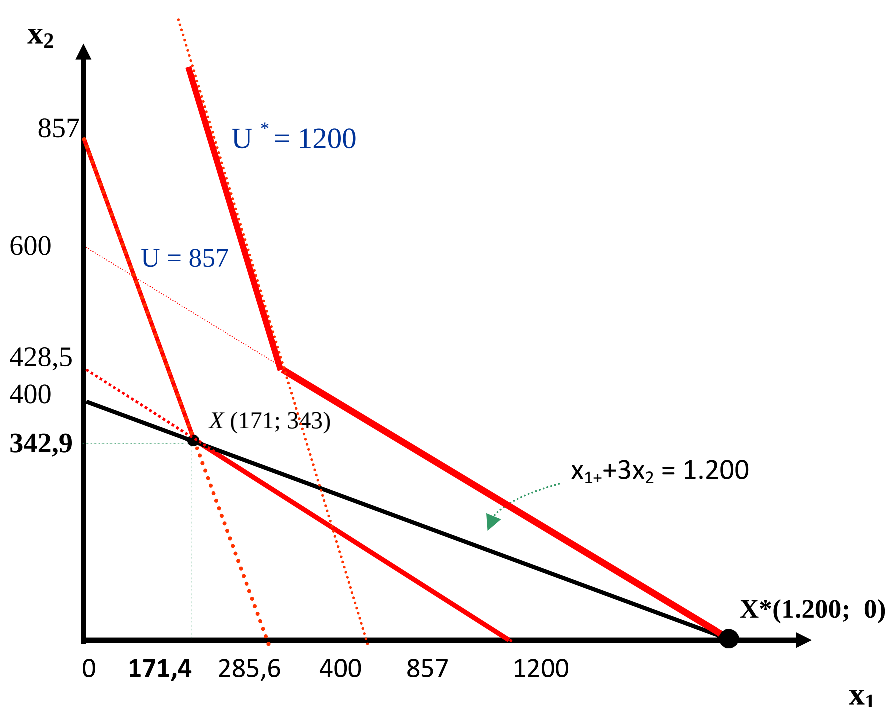
U = Mín. [857.1; 857.1]

Entonces, U = 857

El sistema de ecuaciones que contendrá a esta U será:

$$\begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 = 857 \\ x_1 + 2x_2 = 857 \end{bmatrix}$$

Pero veamos que sucede en el gráfico:se observa que el supuesto equilibrio viola el principio de tangencia, pues la recta presupuestaria cruza el conjunto de consumo interior. Entonces, el consumidor puede alcanzar un mayor nivel de utilidad. Así, la curva de indiferencia puede desplazarse hasta lograr la tangencia con la recta de balance.Esto ocurrirá en el punto X*(1.200; 0), configurándose una solución esquina



Concluiremos señalando que mientras la pendiente de la recta presupuestaria esté en el rango de las pendientes de las funciones lineales que conforman la curva de indiferencia, las demandas óptimas se obtienen mediante las funciones de demanda. En otro caso, tendremos soluciones esquina. Así:

$$a)\quad si\quad \frac{1}{2} < \frac{p_1}{p_2} < 3 \quad \Rightarrow \quad usamos \quad x_i(p,m)$$

$$b)\quad si\quad \frac{p_1}{p_2} < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{m}{p_1} \quad y \quad x_2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^*(m/p_1,\ 0)$$

$$c)\quad si\quad \frac{p_1}{p_2} > 3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{m}{p_2} \quad y \quad x_1 = 0 \quad \rightarrow \quad x^*(0,\ m/p_2)$$

$$\text{En nuestro caso:}\quad \left[\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{3}\right] < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x^*(1.200;\ 0)$$

1.4. Efecto renta y efecto sustitución: Hicks, Slutsky

1. Un consumidor tiene la función de utilidad siguiente:

$$U(x_1, x_2) = x_1 + 2x_1x_2$$

Tiene un ingreso monetario de S/.972.50 y los precios de los dos únicos bienes que consume son p_1= 1.25 y p_2= 5. 00. Si el precio de X_1 sube a 1.50, determine el efecto renta y el efecto sustitución de la variación total del consumo de este bien, según Hicks y Slutsky.

Solución

Primero hallamos las funciones de demanda para encontrar las combinaciones óptimas de consumo, a través del Primal:

$$\begin{aligned} &Max. \quad x_1 + 2x_1x_2 \\ &s.a: \quad p_1x_1 + p_2x_2 = m \end{aligned}$$

$$\ell: \quad x_1 + 2x_1x_2 + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2$$

C.P.O.:

$$\partial\ell / \partial x_1 = 1 + 2x_2 - \lambda p_1 = 0 \qquad \text{... (1)}$$

$$\partial\ell / \partial x_2 = 2x_1 - \lambda p_2 = 0 \qquad \text{... (2)}$$

$$\partial\ell / \partial\lambda = m - p_1x_1 + p_2x_2 = 0 \qquad \text{... (3)}$$

De (1) y (2):

$$\frac{1+2x_2}{2x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

Entonces,

$$x_2 = \frac{p_1x_1}{p_2} - \frac{1}{2} \qquad \text{...(5)} \qquad \text{y} \qquad x_1 = \frac{p_2(1+2x_2)}{2p_1} \qquad \text{...(6)}$$

Luego, remplazándolas relaciones (5) y (6) – una a la vez - en la R.P, obtenemos las funciones de demanda marshallliana:

$$x_1 = \frac{m + 0{,}5p_2}{2p_1} \qquad\qquad x_2 = \frac{m - 0{,}5p_2}{2p_2}$$

Tomando los datos, se encuentra que las canastas óptimas inicial y final, serán respectivamente:

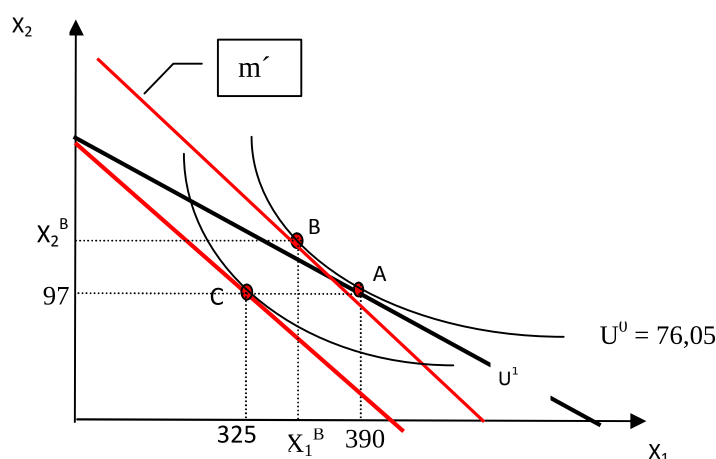
X^A (390, 97) y X^C (325, 97)

Al subir el precio del bien X_1, el consumidor reduce el consumo de este bien, en 65 unidades. Ahora, ¿Cuánto se debe al efecto sustitución y cuánto al efecto renta?

ER y ES según Hicks

Hicks señala que para identificar el ES o efecto precio, hay que compensar al consumidor por la pérdida de su ingreso real, otorgándole un ingreso mayor, de modo que le permita obtener, con la nueva relación de precios, su nivel de utilidad original (U^0). Esto lo consigue en el punto B del gráfico siguiente:

HICKS: Efectos Renta y Sustitución



La utilidad inicial:

$$U^0 = (390) + 2(390)(97)$$

$$U^0 = 76{,}05$$

Para hallar los componentes de la canasta $X^B(x_1^B;\ x_2^B)$, primero se halla el ingreso compensador m'. Como X^B se encuentra en U^0 y el equilibrio se da con la recta presupuestaria que contiene a m´, entonces, los componentes de X^B satisfacen la relación:

$$U^0 = x_1^B + 2\,x_1^B x_2^B$$

Si

$$x_1^B = \frac{m'+0{,}5p_2}{2p_1^1} \qquad \text{y}$$

$$x_2^B = \frac{m'-0{,}5p_2}{2p_2}$$

Entonces:

$$U^0 = \frac{m'+0{,}5\,p_2}{2\,p_1^1} + 2\left(\frac{m'+0{,}5\,p_2}{2\,p_1^1}\right)\left(\frac{m'-0{,}5\,p_2}{2\,p_2}\right)$$

Remplazando por los datos y efectuando operaciones:

$$76.05 = \frac{m'+2{,}5}{3} + 2\left(\frac{m'+2{,}5}{3}\right)\left(\frac{m'-2{,}5}{10}\right)$$

Factorizando, reduciendo y ordenando:

$$76.050 = \left(\frac{m'+2{,}5}{3}\right)\left[1 + 2\,\frac{(m'-2{,}5)}{10}\right]$$

$$76.050 = \left(\frac{m'+2{,}5}{3}\right)\left[\frac{(m'+2{,}5)}{5}\right]$$

$$\frac{(m'+2{,}5)^2}{15} = 76.050$$

$$(m'+2{,}5)^2 = 1'140.750$$

$$m'^2 + 5m' - 1'140.774 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$m' = 1065{,}56$$

Remplazando m' en las demandas marshallianas:

$x_1^B = 356$ y

$x_2^B = 106.3$

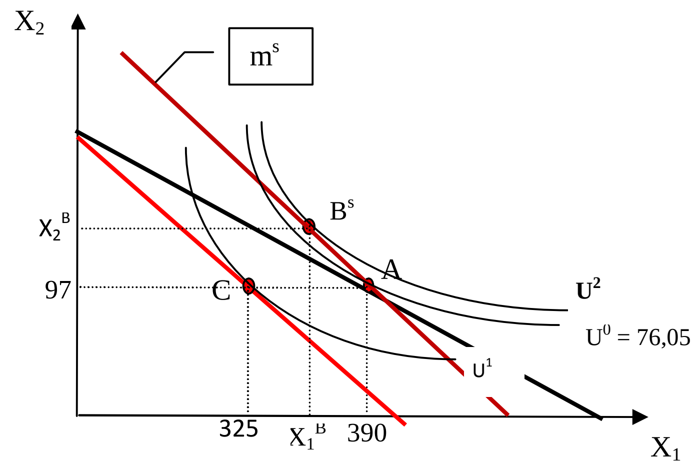
Por tanto,

ES =	390 - 356	= -34
ER =	356 – 325	= -31
ET =	390 – 325	= -65

ER y ES según Slutsky

Para hallar la canasta $X^B(x_1^B; x_2^B)$, según Slutsky, se debe mantener constante la capacidad adquisitiva del consumidor, esto implica compensar al individuo con un ingreso m^s ,tal que le permita adquirir nuevamente la canasta X^A , que elegía antes que variara p_1 (Ver gráfico). Pero, así, el óptimo ya no sería en X^A sino en X^B y con un nivel de utilidad mayor, U^2 .

SLUTSKY: Efectos Renta y Sustitución



Con la rentam^S y la nueva relación de precios, la canasta inicial, A(390; 97) es asequible para el consumidor, entonces:

$$m^s = p_1^1 x_1^A + p_2^0 x_2^A$$

$$m^s = 1.5\,(390) + 5(97)$$

$$m^s = 1{,}070$$

Luego, remplazando m^s en las funciones de demanda, obtenemos:

$$X_1^B = 357.5 \sim 358$$

$$X_2^B = 106.75 \sim 107$$

Por tanto,

ES = 390 – 358 = -32

<u>ER = 358 – 325= -33</u>

ET = 390 – 325= -65

2. La función de utilidad de un consumidor es la siguiente:

$$U(x_1, x_2) = x_1^{3/2} x_2$$

Su ingreso es de S/. 1500, los precios iniciales de los bienes que consume son p_1= 5 y p_2= 10. Si el precio de X_1 se reduce a p_1^1= 3, se le pide halar las cantidades demandadas de cada bien a través de:

a) Las funciones de demanda Marshallianas u ordinarias. Grafique
b) Las funciones de demanda Hiksianas o compensadas a lo Hicks
c) Las funciones de demanda Slutskyanas o compensadas a lo Slutsky.

Solución

a) Funciones de demanda ordinarias

Se formula el primal:

$$\begin{aligned} &Max. \quad x_1^{3/2} \ x_2 \\ &s.a: \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \end{aligned}$$

C.P.O.: $\ell: \quad x_1^{3/2} x_2 + \lambda(m - p_1 x_1 - p_2 x_2$

$$\partial\ell/\partial x_1 = \frac{3}{2} x_1^{\frac{1}{2}} x_2 - \lambda p_1 = 0 \qquad \ldots (1)$$

$$\partial\ell/\partial x_2 = x_1^{3/2} - \lambda p_2 = 0 \qquad \ldots (2)$$

$$\partial\ell/\partial\lambda = m - p_1 x_1 + p_2 x_2 = 0 \qquad \ldots (3)$$

De (1) y (2):

$$\frac{3}{2}\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

Entonces,

$$x_2 = \frac{2 p_1 x_1}{3 p_2} \qquad \ldots(5) \qquad\qquad x_1 = \frac{3 p_2 x_2}{2 p_1} \qquad \ldots(6)$$

Luego, reemplazando (5) y (6) , en la R.P, obtenemos las demandas marshalllianas, así:

$$\Rightarrow \qquad p_1x_1 + p_2\left(\frac{2p_1x_1}{3p_2}\right) = m$$

$$5p_1x_1 = 3m$$

$$x_1 = \frac{3m}{5p_1}$$

$$\Rightarrow \qquad p_1\left(\frac{3p_2x_2}{2p_1}\right) + p_2x_2 = m$$

$$5p_2x_2 = 2m$$

$$x_2 = \frac{2m}{5p_2}$$

Al remplazar los datos, se obtienen las cantidades demandadas, inicialmente, de cada uno de los bienes:

$$x_1 = \frac{3(1500)}{5(5)} = 180$$

$$x_2 = \frac{2(1500)}{5(10)} = 60$$

Asimismo la utilidad máxima será:

$$U^0 = (180)^{3/2}(60)$$

$$U^0 = 144897{,}2$$

Cuando se produce la reducción del precio del bien x_1, las cantidades demandadas serán:

$$\Rightarrow \quad x_1^{\ c} = \frac{3m}{5p_1^{\ 1}}$$

$$x_1^{C} = \frac{3(1500\ \ )}{5(3)} = 300$$

$$\Rightarrow \quad x_2^{c} = \frac{2m}{5p_2^{0}} = 60$$

b) Las funciones de demanda compensada a lo Hicks

Se formula el dual:

$$\begin{aligned} &\text{Min.} \quad p_1x_1 + p_2x_2 \\ &\text{s.a}: \quad x_1^{3/2}\, x_2 = \overline{U} \end{aligned}$$

$$\ell: \quad p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda(\overline{U} - x_1^{3/2}x_2)$$

C.P.O.:

$$\partial\ell/\partial x_1 = p1 - \lambda\frac{3}{2}x_1^{\frac{1}{2}}x_2 = 0 \qquad \dots (1)$$

$$\partial\ell/\partial x_2 = p_2 - \lambda x_1^{3/2} = 0 \qquad \dots (2)$$

$$\partial\ell/\lambda = \overline{U} - x_1^{3/2}x_2 = 0 \qquad \dots (3)$$

De (1) y (2):

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{3}{2}\frac{x_2}{x_1}$$

Entonces,

$$x_2 = \frac{2p_1x_1}{3p_2} \qquad \dots(5)$$

$$x_1 = \frac{3p_2x_2}{2p_1} \qquad \dots(6)$$

Luego, se reemplaza (5) en (3):

$$\Rightarrow \qquad x_1^{3/2}\left(\frac{2p_1x_1}{3p_2}\right)=\overline{U}$$

$$x_1^{5/2}\left(\frac{2p_1}{3p_2}\right)=\overline{U}$$

$$x_1=\left(\frac{3p_2}{2p_1}\overline{U}\right)^{\frac{2}{5}}$$

Asimismo, se remplaza (6) en (3):

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{3p_2x_2}{2p_1}\right)^{\frac{3}{2}}x_2=\overline{U}$$

$$\left(\frac{3p_2}{2p_1}\right)^{\frac{3}{2}}x_2^{\frac{5}{2}}=\overline{U}$$

$$x_2=\left(\frac{2p_1}{3p_2}\right)^{\frac{3}{2}}\overline{U}^{\frac{2}{5}}$$

Remplazando los datos:

$$x_1=\left(\frac{3(10)}{2(5)}(\overline{U})\right)^{\frac{2}{5}}$$

$$x_1=\left(\frac{3(10)}{2(5)}(144897,205\right)^{\frac{2}{5}}$$

$$x_1=180$$

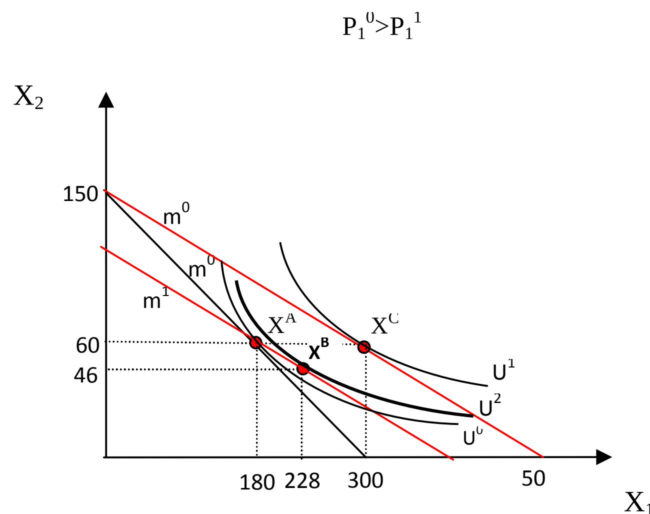
$$x_2 = \left(\frac{2(5)}{3(10)}\right)^{\frac{3}{2}} (144897{,}205)^{\frac{2}{5}}$$

$$x_2 = 60$$

c) Las funciones de demanda compensada a lo Slutsky

La *compensación* cuando se reduce el precio del bien, según Slutsky, implica reducir el gasto del consumidor –a los precios finales- hasta que la canasta inicial (x^A) sea accesible

Gráfico. Compensación según Slutsky



En el gráfico se observa que la canasta óptima final no será X^A sino X^B con un nivel de utilidad ($U^{2)}$ mayor a U^0, asimismo, que ambas canastas serán accesibles a la renta m^1, por tanto se cumple que:

$$p_1^1 x_1^A + p_2^0 x_2^A = p_1^1 x_1^B + p_2^0 x_2^B$$

Asì, el planteamiento para determinar las demandas compensadas a lo Slutsky implica hallar la canasta X^B , de tal modo que el problema a resolver será[5]:

$$\text{Max.} \quad x_1^{3/2} x_2$$
$$\text{s.a}: \quad p_1^{\,1} x_1^{\,A} + p_2^{\,0} x_2^{\,A} = p_1^{\,1} x_1 + p_2^{\,0} x_2$$

$$\ell: \quad x_1^{3/2} x_2 + \lambda(p_1^{\,1} x_1^{\,A} + p_2^{\,0} x_2^{\,A} - p_1^{\,1} x_1 - p_2^{\,0} x_2)$$

C.P.O.:

$$\partial\ell/\partial x_1 = \frac{3}{2} x_1^{\frac{1}{2}} x_2 - \lambda p_1^{\,1} = 0 \quad \ldots(1)$$
$$\partial\ell/\partial x_2 = x_1^{3/2} - \lambda p_2^{\,0} = 0 \quad \ldots(2)$$
$$\partial\ell/\partial\lambda = p_1^{\,1} x_1^{\,A} + p_2^{\,0} x_2^{\,A} - p_1^{\,1} x_1^{\,B} - p_2^{\,0} x_2 = 0 \quad \ldots(3)$$

De (1) y (2):

$$\frac{3}{2}\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1^{\,1}}{p_2^{\,0}}$$

Entonces,

$$x_2 = \frac{2p_1^{\,1} x_1}{3p_2^{\,0}} \quad \ldots(5) \qquad\qquad x_1 = \frac{3p_2^{\,0} x_2}{2p_1^{\,1}} \quad \ldots(6)$$

Luego, reemplazando (5) y (6) , en la restricción, obtenemos las funciones de demanda compensada a lo Slutsky:

$$\Rightarrow \quad p_1^{\,1} x_1^{\,A} + p_2^{\,0} x_2^{\,A} = p_1^{\,1} x_1 + p_2^{\,0}\left(\frac{2p_1^1 x_1}{3p_2^{\,0}}\right)$$

$$p_1^{\,1} x_1^{\,A} + p_2^{\,0} x_2^{\,A} = \frac{5p_1^1 x_1}{3}$$

---

[5]Con fines de facilidad algebraica suprimimos el superíndice B, es decir, hacemos que $X(x_1; x_2) \equiv X^B(x_1^B; x_2^B)$

$$x_1 = \frac{3x_1{}^A}{5} + \frac{3p_2{}^0 x_2{}^A}{5p_1{}^1}$$

$$\Rightarrow \quad p_1{}^1 x_1{}^A + p_2{}^0 x_2{}^A = p_1{}^1\left(\frac{3p_2^0 x_2}{2p_1^1}\right) + p_2{}^0 x_2$$

$$p_1{}^1 x_1{}^A + p_2{}^0 x_2{}^A = \frac{5p_2^0 x_2}{2}$$

$$x_2 = \frac{2p_1{}^1 x_1{}^A}{5p_2{}^0} + \frac{2x_2{}^A}{5}$$

Al remplazar los datos en las demandas compensadas a lo Slutsky, se obtendrán las cantidades demandadas de la canasta X^B, así:

$$x_1 = \frac{3(180)}{5} + \frac{3(10)(60)}{5(3)}$$

$$x_1 = 108 + 120$$

$$x_1 = 228$$

$$x_2 = \frac{2(3)(180)}{5(10)} + \frac{2(60)}{5}$$

$$x_2 = 21{,}6 + 24$$

$$x_2 = 45{,}6$$

3. Pedro pescador es un amante del pescado pero sólo consume pejerrey y bonito. Sus preferencias son invariables y siempre esta dispuesto a intercambiar 3 Kg. de pejerrey por un Kg. de bonito sin que se altere su utilidad. Su presupuesto para comprar estos bienes es S/ 200, el pejerrey le cuesta S/ 2/Kg. y el bonito, S/ 8/Kg.

Bajo estas consideraciones se le pide que:

a) Plantee la función de utilidad de Pedro
b) Encuentre la canasta de consumo que le reporta la máxima utilidad. grafique
c) Si el precio del pejerrey sube a S/ 4/Kg., su consumo disminuye ¿cuánto es debido al efecto sustitución y cuánto al efecto renta?. Analice según Hicks y Slutsky.

Solución

a) Para Pedro los bienes que consume son sustitutos perfectos, por tanto su función de utilidad responde a la expresión siguiente:

$$U(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$$

Donde:

x_1 : pejerrey (Kg.)
x_2 : bonito (Kg.)

Puesto que el consumidor esta dispuesto a sustituir1 Kg de bonito (x_2) por 3 Kg de pejerrey (x_1), entonces:

$$x_1 = 3x_2$$

Así, la función será:

$$U(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2$$

y sus transformaciones monótonas crecientes[6]

---

[6]Por ejemplo:

$$U = \frac{x_1}{3} + x_2$$
$$U = 3x_1 + 9x_2$$
$$etc.$$

b) En este caso, dado que la función de utilidad es una recta, se tendrá una solución esquina, y su determinación dependerá de las pendientes de la función de utilidad y de la recta presupuestaria.

Comparando pendientes:

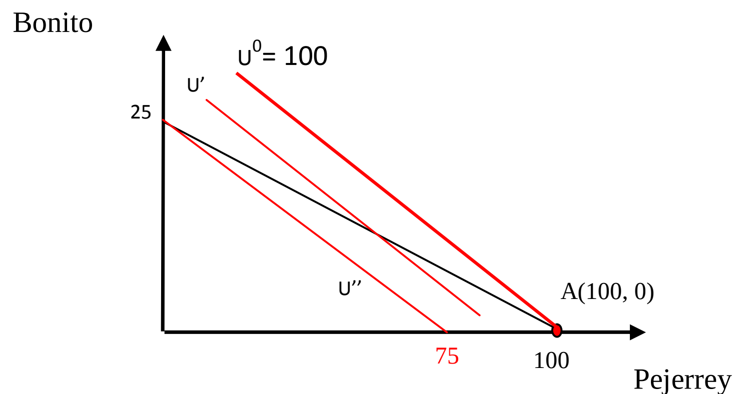
$U = x_1 + 3x_2$ $\qquad$ $200 = 2x_1 + 8x_2$

Pendiente U(X): $\qquad$ Pendiente R.P.:

1/3 $\quad$ > $\quad$ 1/4

La pendiente de la función de utilidad es mayor que la de la restricción presupuestaria. Entonces, el gráfico siguiente nos ayudará a fijar el óptimo:

Gráfico. Equilibrio de bienes sustitutos perfectos



Así, su consumo óptimo será de 100 Kg de pejerrey y nada de bonito (punto A). Por tanto, su utilidad será:

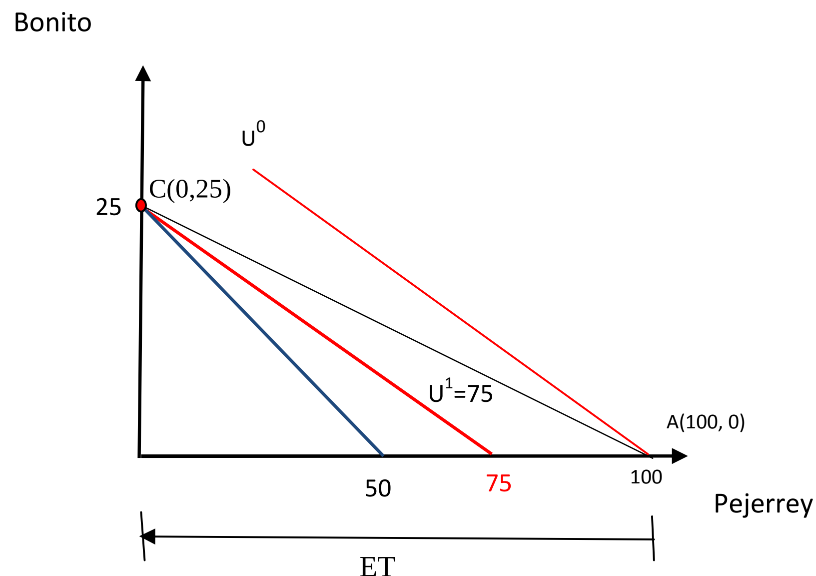
$$U^0 = 100 + 3(0)$$

$U^0 = 100$

c) Para el cálculo de el Efecto sustitución (ES) y el Efecto renta (ER), cuando el precio del pejerrey sube a S/ 4/Kg., primero hallamos el nuevo equilibrio.

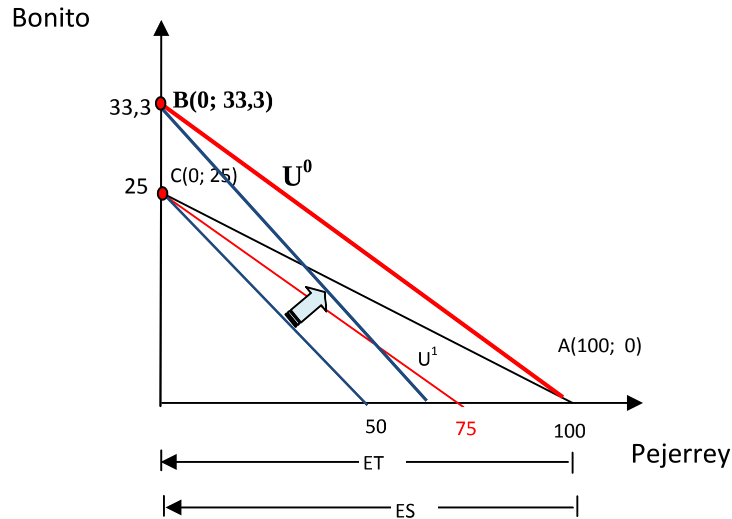
En el gráfico adjunto, se observa que el nuevo equilibrio se dará en el punto C – donde Pedro consume 25 Kg de bonito y nada de pejerrey- este cambio radical en su consumo se da porque, en esta nueva situación, la pendiente de la restricción presupuestaria es mayor que la pendiente de la función de utilidad (1/2 > 1/3).

Por tanto, para Pedro, el Efecto Total (ET) del incremento del precio del pejerrey será el descenso de su consumo en 100kg. $(la\ dis\tan cia\ \overline{AC})$



ES y ER según Hicks

Para este caso el análisis en el gráfico inferior es suficiente. Partiendo de la situación final,C(0; 25), hay que compensar el consumidor con un ingreso que le permita recuperar el nivel de utilidad inicial U^0; entonces, trasladando la recta de balance azul hacia la derecha se alcanza a U^0 – por tanto el equilibrio- en el punto B(0; 33,3).



Así, el ES, variación de la demanda de A a B, es de 100 Kg.; mientras que el ER, variación de la demanda de B a C, es igual a cero

Por tanto,

$$ET = ES + ER$$

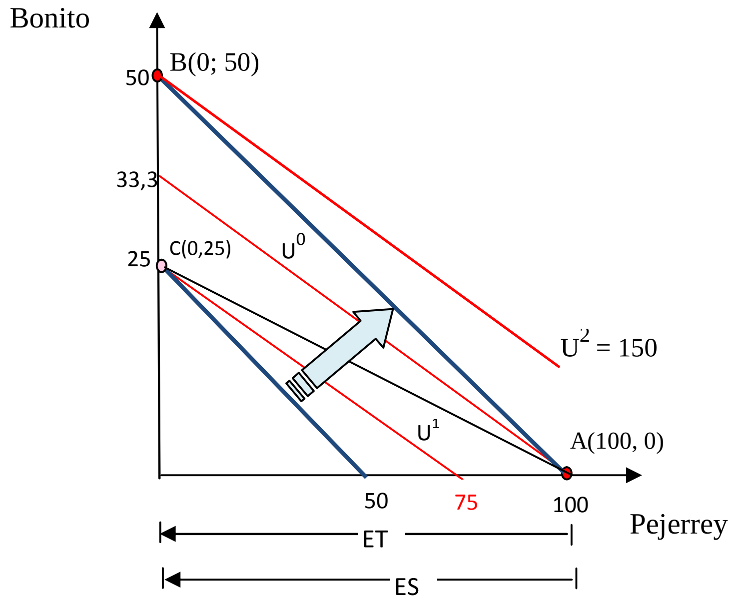
$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

$$-100 = -100 + 0$$

La compensación de Hicks le permitirá al consumidor alcanzar el nivel de utilidad $U^0 = 100$

ES y ER según Slutsky

La compensación de Slutsky, cuando el precio del pejerrey sube y su equilibrio pasa de la canasta A a la C, consiste en restituir la capacidad adquisitiva al consumidor, otorgándole un ingreso que le permita comprar otra vez la canasta inicial A.



Aplicando el procedimiento compensador de Slutsky, en el grafico se observa que la recta que representa este mayor ingreso, que hace asequible a A, no está optimizando con U^0, pues el consumidor puede alcanzar una "curva" de indiferencia más alta, en este caso U^2, logrando el equilibrio esquina con la canasta óptima B(0; 50).

Por tanto,

$$ET = ES + ER$$

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

$$-100 = -100 + 0$$

En este caso los ES y ER son iguales a los hallados para Hicks, pero con la diferencia de que el efecto de la compensación de Slutsky le significará al consumidor alcanzar un nivel de utilidad mayor, pues su utilidad será $U^2 = 150$

1.6. Variación Compensada y variación Equivalente

1. Cierta persona tiene un ingreso monetario de S/ 1.500, que los destina al consumo de agua y hortalizas. La satisfacción que obtiene del consumo de estos bienes, se expresa a través de la función:

$$U(x_1, x_2) = x_1 + 30x_2 - x_2^2$$

El agua le cuesta S/ 1,50 el m^3, mientras que las hortalizas le significan un desembolso de S/ 12 por kilo. Si por justificaciones de rentabilidad SEDAPAL decide incrementar el m^3 de agua a S/ 2,00; determine:

a) Si los bienes son normales o inferiores.
b) ¿Cual debería ser el subsidio que tendría que otorgarle el gobierno a fin de que el consumidor no vea modificado su bienestar?.
c) Si el gobierno, por razones políticas, decide no incrementar el precio del agua ¿cuál debería ser el impuesto que tendría que aplicar el gobierno si quiere tener un resultado equivalente en términos de bienestar?

Solución

a) Para determinar si los bienes son normales o inferiores se debe hallar el efecto renta. Por tanto se empieza hallando las funciones de demanda marshalliana a través del primal:

$$\begin{aligned} &Max. \quad x_1 + 30x_2 - x_2^2 \\ &s.a: \quad p_1x_1 + p_2x_2 = m \end{aligned}$$

$$\ell: \quad x_1 + 30x_2 - x_2^2 + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2)$$

C.P.O.:

$$\partial\ell/\partial x_1 = 1 - \lambda p_1 = 0 \quad \ldots(1)$$

$$\partial\ell/\partial x_2 = 30 - 2x_2 - \lambda p_2 = 0 \quad \ldots(2)$$

$$\partial\ell/\partial \lambda = m - p_1x_1 + p_2x_2 = 0 \quad \ldots(3)$$

De (1) y (2):

$$\frac{1}{30-2x_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Entonces, se despeja x_2, y en vista de que x_1 no aparece en la relación, se concluye que ésta es la demanda marshalliana:

$$x_2 = 15 - \frac{p_2}{2p_1}$$

Luego, remplazando x_2 en la R.P, y despejando, obtenemos la demanda marshallliana de x_1:

$$p_1 x_1 + p_2\left(15 - \frac{p_2}{2p_1}\right) = m$$

$$p_1 x_1 + 15p_2 - \frac{p_2^{\,2}}{2p_1} = m$$

$$x_1 = \frac{m}{p_1} - \frac{15p_2}{p_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2$$

Reemplazando los datos en las funciones de demanda halladas, se encuentra que las canastas óptimas inicial y final son, respectivamente:

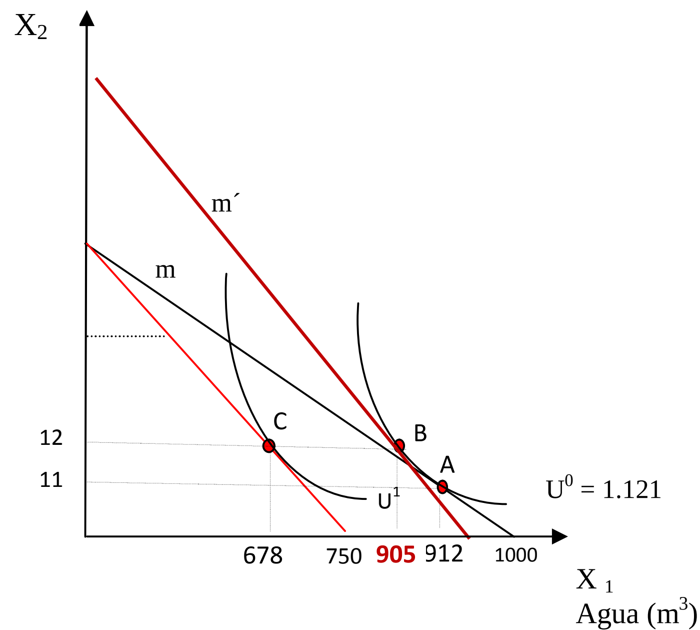
A (912; 11), C (678; 12)

Para el cálculo del efecto renta (y el efecto sustitución) se recurre al análisis de Hicks o Slutsky

Al subir el precio del agua, el consumidor merma su bienestar, ahora la U^0 inicial compatible con la canasta A le es inaccesible, tiene que conformarse con un menor nivel de utilidad, U^1, concordante con C. Según Hicks, para identificar el ER y el ES,

hay que compensar al consumidor con un ingreso que le permita recuperar U^0 (ver grafico adjunto).

<u>HICKS: Efectos Renta y Sustitución</u>



Las cantidades consumidas en la canasta B son desconocidas pero se conoce que responden a las funciones de demanda, así:

$$x_1^B = \frac{m' - 15\, p_2}{p_1^1} + \frac{1}{2}\left(\frac{p_2}{p_1^1}\right)^2$$

$$x_2^B = 15 - \frac{p_2}{2\, p_1^1}$$

Reemplazando los datos, se tiene que:

$$x_1^B = \frac{m' - 144}{2} \qquad\qquad x_2^B = 12$$

Asimismo, se sabe que la canasta B se encuentra en U^0, entonces, remplazando sus componentes se determina el valor de m' (previamente se halla U^0, remplazando los elementos conocidos de la canasta A):

$$U^0 = [912] + 30(11) - (11)^2$$

$$U^0 = 1.121$$

Entonces, tomando los componentes de la canasta B:

$$\left[\frac{m' - 144}{2}\right] + 30(12) - (12)^2 = 1.121$$

$$m' = 1.954$$

Luego,

$$x_1^B = \frac{1.954 - 144}{2} = 905$$

Asi,

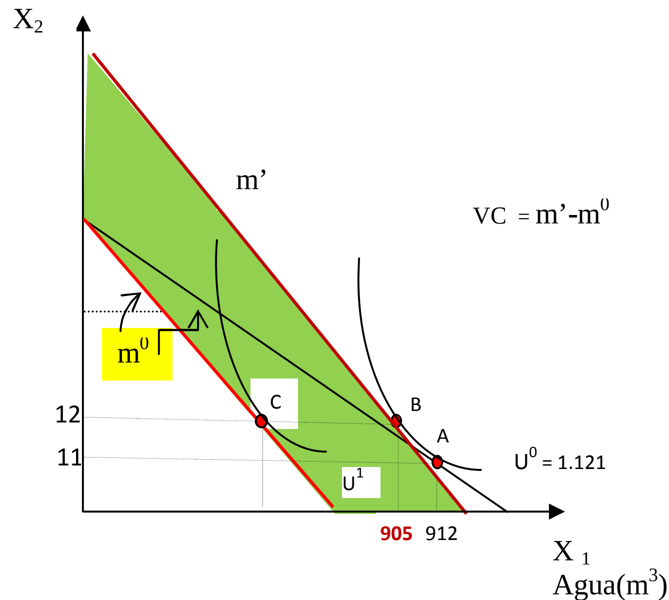
ET = 678-912 = -234
ES = 905-912 = -7

ER = 678-905 = -227

Por tanto, se constata que el consumo de agua (bien x_1) disminuye cuando el ingreso disminuye de m' a m, tipificando el caso de un bien normal. Por otro lado, se observa que el consumo de hortalizas (bien x_2) se mantiene constante al disminuir el ingreso, es decir, se mantiene neutro con respecto al ingreso.

b) En este caso se tiene que hallar la variación compensada (VC), que es el ingreso adicional que permite al consumidor alcanzar- tras la variación del precio de uno de los bienes- nuevamente U^0. La VC está representada en el grafico inferior por la franja de color verde.

La Variación compensada



La VC se puede hallar a través de la FUI o de la Función de gasto:

- **Empleando la Función de utilidad indirecta: v(P, m)**

  Al remplazar las demandas marshallianas en la función de utilidad directa y reducir, hallamos que:

$$v(P,m)=\frac{m-15p_2}{p_1}+0{,}25\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2+225$$

En el gráfico, se observa que la renta m’ esta asociada a la canasta B. Asimismo, el vector de precios relacionado a B es P^1, y B se encuentra en U^0, entonces en base a la dualidad se valida que $U^0 \equiv v(P^1, m')$, entonces, la FUI para nuestro propósito es:

$$v(P^1,m')\equiv U^0=\frac{m'-15p_2}{p_1^{\,1}}+0{,}25\left(\frac{p_2}{p_1^{\,1}}\right)^2+225$$

Al remplazar equivalencias (m'= m^0+VC) y datos, la expresión se reduce a mostrarnos el valor de la VC:

$$U^0 = \frac{m^0 + VC - 15(12)}{2} + 0{,}25\left(\frac{12}{2}\right)^2 + 225$$

$$1.121 = \frac{1500 + VC - 180}{2} + 234$$

$$\boxed{VC = 454}$$

- **Empleando la Función del gasto: e(P; U)**

La función de gasto general responde a la expresión:

$$e(P,U) = p_1 U - 0{,}25\frac{{p_2}^2}{p_1} - 225 p_1 + 15 p_2$$

La variación compensada se define como:

$$VC = m' - m$$

Recurriendo a la dualidad:

$$\mathrm{VC} = \mathrm{e}(\mathrm{P}^1, \mathrm{U}^0) - \mathrm{e}(\mathrm{P}^0, \mathrm{U}^0)$$

Remplazando por las fórmulas respectivas, los datos y despejando:

$$\mathrm{VC} = \left[\mathrm{p}_1^{\,1}\mathrm{U}^0 - 0{,}25\frac{(\mathrm{p}_2)^2}{\mathrm{p}_1^{\,1}} - 225(\mathrm{p}_1^{\,1}) + 15(\mathrm{p}_2)\right] - \left[\mathrm{p}_1^{\,0}\mathrm{U}^0 - 0{,}25\frac{(\mathrm{p}_2)^2}{\mathrm{p}_1^{\,0}} - 225(\mathrm{p}_1^{\,0}) + 15(\mathrm{p}_2)\right]$$

$$\mathrm{VC} = [2242 - 18 - 450 + 180] - [1.681{,}5 - 24 - 337{,}5 + 180]$$

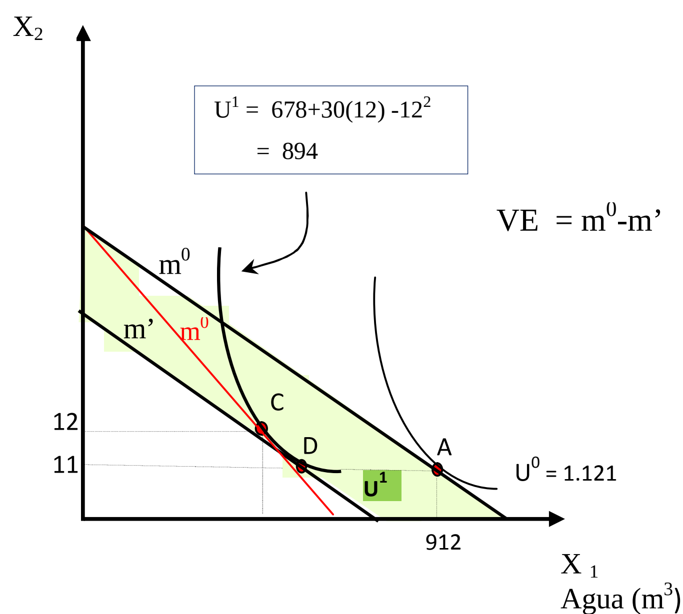
$$VC = 1954 - 1.500$$

$$\boxed{VC = 454}$$

Por lo tanto, el subsidio necesario será de S/ 454

c) Para lograr el mismo efecto de un incremento del precio del agua, es decir, reducir la utilidad del consumidor al nivel U^1 sin que varíen los precios iniciales, tenemos que aplicar un impuesto. Su cálculo implica hallar la Variación Equivalente (VE)

La Variación Equivalente



Análogamente a la VC, la VE se puede hallar a través de la Función de utilidad indirecta o de la Función del gasto, así:

- La VE a través de v(P,m)

Se sabe que: $VE = m^0 - m'$

Entonces, $m' = m^0 - VE$

En el gráfico, en la canasta D se cumple que:

$$v(P^0, m') \equiv U^1 = \frac{m' - 15p_2}{p_1} + 0{,}25\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 + 225$$

Remplazando los valores y equivalencias conocidos, y despejando:

$$U^1 = \frac{(m^0 - VE) - 15(12)}{1,5} + 0,25\left(\frac{12}{1,5}\right)^2 + 225$$

$$894 = \frac{(1.500 - VE) - 180}{1,5} + 16 + 225$$

$$\frac{(1.320 - VE)}{1,5} = 653$$

$$\boxed{VE = 340,5}$$

- VE a través de e(P,U)

Hallar la VE empleando la función de gasto implica el proceso siguiente:

Como, $VE = m^0 - m'$

Por dualidad:

$$VE = e(P^0, U^0) - e(P^0, U^1)$$

Remplazando las Funciones de gasto respectivas, los datos, y reduciendo:

$$VE = \left[p_1^0 U^0 - 0,25\frac{(p_2)^2}{p_1^0} - 225(p_1^0) + 15(p_2^0)\right] - \left[p_1^0 U^1 - 0,25\frac{(p_2^0)^2}{p_1^0} - 225(p_1^0) + 15(p_2^0)\right]$$

$$VE = [1.681,5 - 24 - 337,5 + 180] - [1.341 - 24 - 337,5 + 180]$$

$$VE = [1.500] - [1.159,5]$$

$$\boxed{VE = 340,5}$$

Así el impuesto que tendría que aplicar el gobierno si no varía el precio del agua- y lograr el objetivo propuesto- es del orden de S/ 340,5.

2. A cierta persona le gusta sobremanera los jugos de lúcuma pero cada vaso de jugo tiene que ser preparado con la combinación única de dos lúcumas con ½ litro de leche. Cuenta con una renta de S/ 120 y los precios de los bienes que consume son S/1.25 cada lúcuma y S/. 3.00 el litro de leche. Posteriormente, el precio del litro de leche se reduce a S/ 2.50. Con esta información se pide:

   a) Formular la función de utilidad de esta persona
   b) Determinar la máxima utilidad que obtiene bajo las condiciones iniciales. Grafique.
   c) Indicar si existen diferencias entre los puntos de vista de Hicks y Slutsky respecto a los efectos renta y sustitución cuando varía el precio de la leche.
   d) Para el Estado, cuando el precio de un bien se reduce, la "compensación" –según Hicks o Slutsky- implica reducir los ingresos a través de un impuesto, señale cuál de las dos le es más conveniente.
   e) Hallar la variación compensada empleando v(P,m) y e(P,U). Grafique
   f) Hallar la variación equivalente empleando v(P,m) y e(P,U). Grafique.

Solución

a) La función de utilidad implica el consumo de los bienes en proporciones fijas, cualquier cantidad adicional de uno u otro bien será redundante. La expresión matemática será:

$$U(x_1, x_2) = Mín.\ (ax_1;\ bx_2)$$

El parámetro "a" corresponde a la utilidad que logra el consumidor con una lúcuma, en este caso, la mitad; del mismo modo, el parámetro "b" se obtendrá de la relación entre una unidad de consumo de x_2 y las unidades de utilidad obtenidas, así, si ½ litro de leche equivale a 1 unidad de utilidad (1 vaso), entonces, 1 litro de leche equivale a 2 unidades de utilidad. Por tanto la función de utilidad será:

$$U(x_1, x_2) = Mín.\ \left(\frac{1}{2}x_1;\ \ 2x_2\right)$$

b) Para determinar la máxima utilidad del consumidor, antes se deben conocer las cantidades óptimas de consumo, entonces:

Se sabe que:

$$\frac{1}{2}x_1 = 2x_2$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 4x_2 \quad \wedge \quad x_2 = \frac{x_1}{4}$$

Remplazando estas equivalencias en la restricción presupuestaria, obtenemos las funciones de demanda ordinarias:

- $$p_1x_1 + p_2\left(\frac{x_1}{4}\right) = m$$

$$4p_1x_1 + p_2x_1 = 4m$$

$$x_1(4p_1 + p_2) = 4m$$

$$\boxed{x_1 = \frac{4m}{4p_1 + p_2}}$$

- $$p_1(4x_2) + p_2x_2 = m$$

$$x_2(4p_1 + p_2) = m$$

$$\boxed{x_2 = \frac{m}{4p_1 + p_2}}$$

Empleando los datos encontramos la canasta óptima del consumidor:

$$x_1 = \frac{4(120)}{4(1.25) + 3.0} = \frac{480}{8} = 60$$

$$x_2 = \frac{120}{4(1.25) + 3.0} = \frac{120}{8} = 15$$

Luego, la utilidad que obtendrá será:

$$U^0 = \text{Mín.}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{4m}{4p_1 + p_2}\right);\ 2\left(\frac{m}{4p_1 + p_2}\right)\right)$$

$$U^0 = \text{Mín.}\left(\frac{2m}{4p_1 + p_2};\ \frac{2m}{4p_1 + p_2}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad U^0 = \frac{2m}{4p_1 + p_2}$$

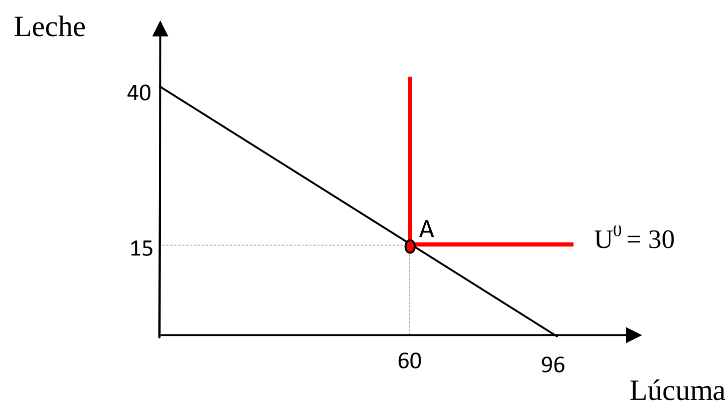
Reemplazando datos,

$$U^0 = \frac{2(120)}{4\,(1{,}25) + (3)}$$

$$U^0 = \frac{240}{8}$$

$$\boxed{U^0 = 30}$$

Gràfico. Equilibrio consumidor: bienes complementarios perfectos

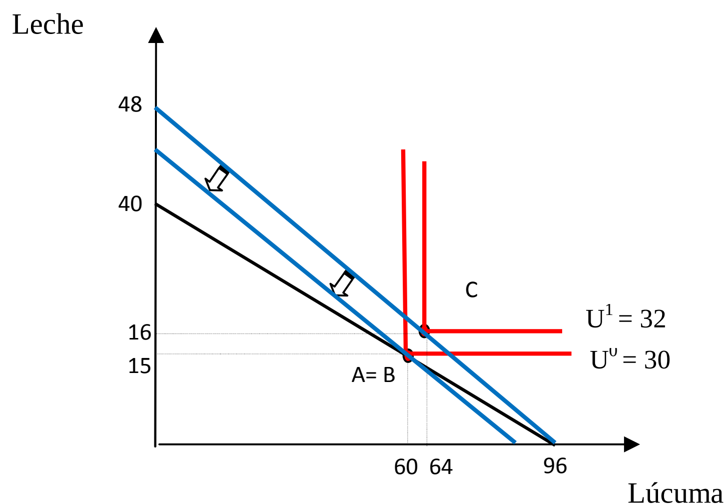


c) Las diferencias entre Hicks y Slutsky con respecto a los efectos renta (ER) y sustitución (ES) en la demanda cuando el precio del litro de leche baja a S/ 2.50, se analizaran en términos gráficos

ER y ES según Hicks

Al caer el precio de la leche, el consumidor optimiza en C(64; 16), elevando su nivel de utilidad a $U^1 = 32$. Así, la variación total en el consumo de leche será el incremento en 1 litro. Para determinar cuánto es debido al ER ycuànto al ES, según Hicks, se debe reducir la restricción presupuestaria que contiene los precios finales, hasta que el consumidor recupere el nivel de utilidad U^0, esto lo logra cuando se da la tangencia en el punto B (que coincide exactamente con la canasta inicial A).

Gràfico. ER y ES según Hicks



Por tanto,

$$ET = ES + ER$$

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

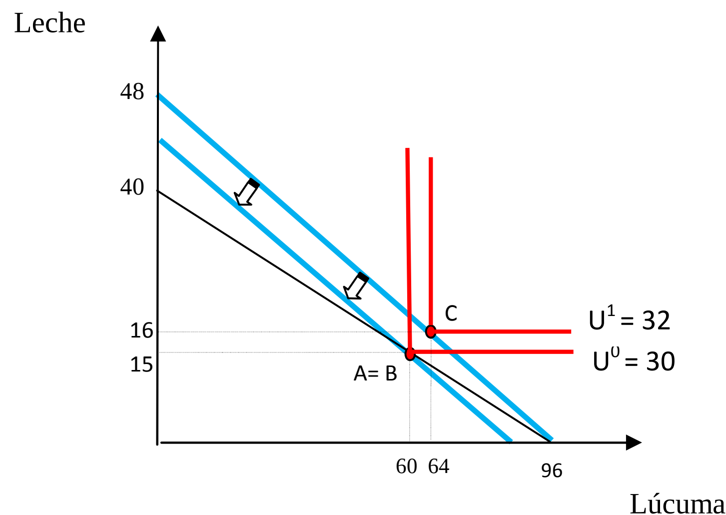
$$1 = 0 + 1$$

Según Hicks, la reducción del precio de la leche en S/. 0,50 , hará que el consumidor demande 1 litro menos de leche, esta reducción del consumo se debe únicamente al ER, pues el ES es cero.

ES y ER según Slutsky

Para hallar el ES y el ER, Slutsky nos dice que hay que compensar al consumidor manteniendo su ingreso real constante, así, hay que reducir su ingreso hasta que su consumo retroceda y le permita, otra vez, consumir la canasta inicial A. Como se observa en el gráfico inferior esto se logra trasladando la recta de balance azul hacia el origen hasta que se da la tangencia en el punto B (=A).

Gràfico. ER y ES según Slutsky



Entonces,

$$ET = ES + ER$$

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

$$1 = 0 + 1$$

En este caso, se observa que los ER y ES de Slutsky coinciden exactamente con los de Hicks.

d) Para determinar cuál de las imposiciones –según Hicks o Slutsky- es más conveniente para el Estado se deben hallar las nuevas rentas.

Según Hicks, al reducir la renta hasta m’, se alcanza U^0 y se compra la canasta B, entonces:

$$U^0 = \frac{2m'}{4p_1^0 + p_2^1}$$

Reemplazando los datos y despejando:

$$30 = \frac{2m'}{4(1{,}25) + 2{,}5}$$

$$m' = 112{,}5$$

Entonces, el impuesto (t) según Hicks es:

$$t = m^0 - m'$$

$$t = 120 - 112{,}5$$

$$\boxed{t = 7{,}5}$$

En el **caso de Slutsky**:

$$m'' = p_1^0 x_1^A + p_2^1 x_2^A$$

Reemplazando los datos:

$$m'' = 1{,}25(60) + 2{,}5(15)$$

$$m'' = 112{,}5$$

Así, el impuesto, según Slutsky:

$$t = m^0 - m''$$

$$t = 120 - 112{,}5$$

$$\boxed{t = 7{,}5}$$

Por tanto, los enfoques de Hicks y de Slutsky tienen el mismo efecto tributario para el Estado.

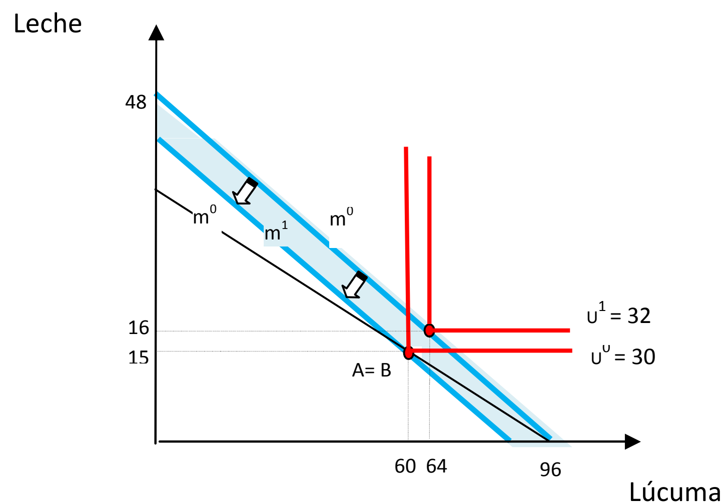
e) En este caso, según el gráfico inferior, la Variación compensada responde a la siguiente relación:

$$VC = m^0 - m^1$$

Entonces,

$$m^1 = m^0 - VC$$

Gràfico. VC de bienes complementarios perfectos



VC a través de la FUI

La FUI del consumidor en B:

$$v(P', m') = \frac{2m'}{4p_1^0 + p_2^1}$$

Aplicando las equivalencias y reemplazando los datos:

$$v(P',m') \equiv U^0 = \frac{2(m^0 - VC)}{4(1,25) + 2,5}$$

$$30 = \frac{2(120 - VC)}{7,5}$$

$$VC = 120 - 112,5$$

$$\boxed{VC = 7,5}$$

VC a través de la Función de gasto

En general, la función de gasto:

$$e(P,U) = \frac{U(4p_1 + p_2)}{2}$$

En el punto B:

$$e(P',U^0) = \frac{U^0(4p_1^{\ 0} + p_2^{\ 1})}{2} \equiv m^1$$

Reemplazando datos:

$$m' = \frac{30\,[4(1,25) + 2,5]}{2}$$

$$m' = \frac{30\,[7,5]}{2}$$

$$m' = 112,5$$

La renta inicial m^0 está relacionada con las funciones de gasto:

$$* \quad e(P^0,U^0) = \frac{U^0(4p_1^{\ 0} + p_2^{\ 0})}{2} \equiv m^0$$

$$* \quad e(P^1,U^1) = \frac{U^1(4p_1^{\ 0} + p_2^{\ 1})}{2} \equiv m^0$$

Reemplazando datos:

$$* \quad e(P^0, U^0) = \frac{30[4(1,25)+3]}{2} \equiv m^0$$

$$e(P^0, U^0) = \frac{30[8]}{2} \equiv m^0$$

$$m^0 = 120$$

$$* \quad e(P^1, U^1) = \frac{32[4(1,25)+2,5]}{2} \equiv m^0$$

$$e(P^{10}, U^1) = \frac{32[7,5]}{2} \equiv m^0$$

$$m^0 = 120$$

Entonces,

$$VC = e(p^1, U^1) - e(p^1, U^0)$$

$$= 120 - 112,5 = 7,5$$

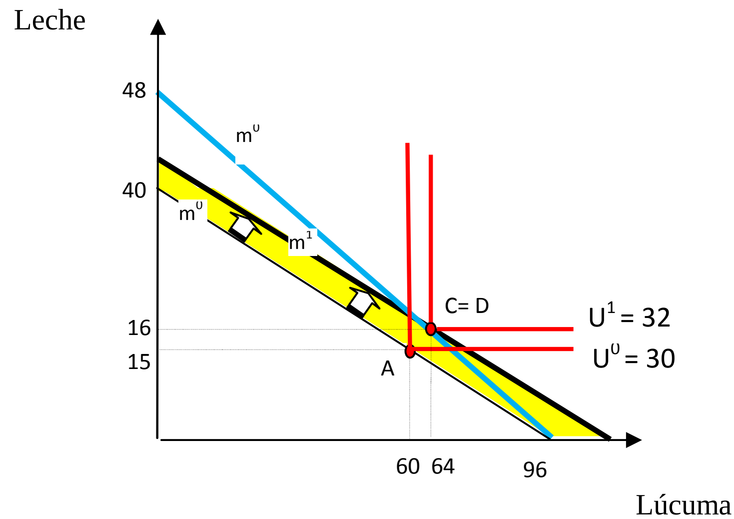
$$ó \quad VC = e(p^0, U^0) - e(p^1, U^0)$$

$$= 120 - 112,5 = 7,5$$

f) En este caso la VE vendría a ser la renta adicional que habría que darle al consumidor para que alcance el nivel de utilidad U^1, si es que los precios iniciales no variasen. Su cálculo implica desplazar la recta presupuestaria inicial hasta que sea tangente a U^1.

En el gráfico inferior se aprecia que la VE viene a ser un subsidio, y está representada por la franja amarilla.

Grafico. VE de bienes perfectamente complementarios



Así,

$$VE = m^1 - m^0 \quad \Longrightarrow \quad m^1 = m^0 + VE$$

VE a través de la FUI

En D, la FUI es:

$$v(P^0, m') = \frac{2m'}{4p_1^{\,0} + p_2^{\,0}} \equiv U^1$$

Reemplazando valores y despejando:

$$\frac{2(m^0 + VE)}{8} = 32$$

$$VE = \frac{256}{2} - 120$$

$$\boxed{VE = 8}$$

VE a través de e(P,U)

Como se ha visto:

$$VE = m^1 - m^0$$

$$= e(P^0, U^1) - e(P^0, U^0)$$

$$= \frac{U^1(4p_1^{\ 0} + p_2^{\ 0})}{2} - \frac{U^0(4p_1^{\ 0} + p_2^{\ 0})}{2}$$

$$= \frac{(32)(8)}{2} - \frac{(30)(8)}{2}$$

$$= 128 - 120$$

$$\boxed{VE = 8}$$

1.6. Elasticidad

1. La curva de demanda de un bien tiene elasticidad constante e igual a -2 (isoelástica). Al precio de S/. 8 se demandan 750 unidades. Con esta información se pide:

   a) Formular la función de demanda
   b) Demuestre la isoelasticidad cuando el precio es S/. 5
   c) Determine el equilibrio de mercado si la oferta es $p = 0{,}01X$
   d) Si otro bien (Y) que tiene una elasticidad cruzada con nuestro bien (X) igual a 0,9, sube de precio en 15% ¿cómo varia el equilibrio del mercado?

Solución:

a) La función de demanda de este tipo de bienes responde a la forma:

$$X^d = \frac{k}{p^\alpha}$$

La elasticidad de esta función de demanda es:

$$\varepsilon_p = \frac{\partial X^d}{\partial p}\frac{p}{X^d} \quad = \quad -\alpha\frac{k}{p^{\alpha+1}}\frac{p}{k/p^\alpha}$$

Entonces,

$$-\alpha\frac{k}{p^{\alpha+1}}\frac{p}{k/p^\alpha} \quad = -2$$

Reduciendo:

$$-\alpha\frac{\cancel{k}}{\cancel{p^{\alpha+1}}}\frac{\cancel{p^{\alpha+1}}}{\cancel{k}} \quad = -2$$

$$\alpha = 2$$

Luego, hallamos el parámetro k reemplazando $(p, X) \equiv (8, 750)$ en la función de demanda:

$$750 = \frac{k}{(8)^2}$$

$$k = 750 \times 64$$

$$k = 48.000$$

Entonces,

$$X^d = \frac{48.000}{p^2}$$

b) Si p =5 , entonces

$$X^d = \frac{48.000}{(5)^2}$$

$$X^d = 1.920$$

$$\varepsilon_p = -2\frac{48.000}{(5)^3}\frac{5}{48.000/(5)^2}$$

$$\varepsilon_p = -2$$

c) Equilibrio de mercado

$$X^d = \frac{48.000}{p^2} \qquad X^o = \frac{p}{0{,}01}$$

Equilibrio:

$$\frac{48.000}{p^2} = \frac{p}{0{,}01}$$

$$p^3 = 480$$

$$p = 7{,}83 \qquad X = 783$$

d) Si $\epsilon_{x,y} = 0{,}9$ se trata de bienes sustitutos

De la fórmula de $\epsilon_{x,y}$:

$$\rightarrow \quad \Delta\%X = \varepsilon_{X,Y}.\Delta\%P_Y$$
$$= 0{,}9 \times 15\%$$
$$= 13{,}5$$

La nueva función de demanda:

$$X^{d'} = \frac{48.000}{p^2}(1{,}135)$$

$$X^{d'} = \frac{54.480}{p^2}$$

El nuevo equilibrio:

$$= \frac{54.480}{p^2} = \frac{p}{0{,}01}$$

$$p^3 = 544{,}8$$

$$p^3 = 544{,}8$$

$$p = 8{,}17$$

$$X = 816{,}7 \approx 817$$

2. Los productores de maíz están proyectando la demanda de su producto, para estimar las siembras de los próximos 4 años. Se tienen los siguientes datos de las variables más importantes que afectan la demanda:

Años	Precio (US$/TM)	Ingresos Promedio (US$)
Año 0	90	850
Año 1	105	850
Año 2	100	1020
Año 3	90	918
Año 4	95	1092

Si las elasticidades precio e ingreso son –0.8 y 1.2, respectivamente; y la demanda actual (Año 0) es de 117,500 TM., determine:

a) Los niveles de producción futura.
b) El maíz importado que compite con el nacional (aunque este último es más apreciado) mantiene constante su precio,de $85/TM , hasta el año 3. El año 4 sube a $93.5/TM. Si la elasticidad cruzada es de 0.8, cómo se verá afectada la demanda?.

Solución:

a) La producción futura

Las fórmulas de las elasticidades precio (ϵ_p) e ingreso (ϵ_p) son:

$$\varepsilon_p = \frac{\Delta\%X}{\Delta\%P} \qquad \varepsilon_m = \frac{\Delta\%X}{\Delta\%m}$$

Año 1:

De la fórmula de E_p:

$$\rightarrow \quad \Delta\%X^1 = \varepsilon_p . \Delta\%P^1$$
$$= -0{,}8 \times 16{,}67$$
$$= -13{,}3$$

De la fórmula de E_m: → $\Delta\% X^1 = \varepsilon_m . \Delta\% m^1$

$= 1{,}2 \times 0$

$= 0$

Año 2:

De la fórmula de E_p → $\Delta\% X^2 = \varepsilon_p . \Delta\% P^2$

$= -0{,}8 \times -4{,}76\%$

$= 3{,}8\%$

De la fórmula de E_m → $\Delta\% X^2 = \varepsilon_m . \Delta\% m^2$

$= 1{,}2 \times 20\%$

$= 24\%$

Año 3:

De la fórmula de E_p → $\Delta\% X^3 = \varepsilon_p . \Delta\% p^3$

$= -0{,}8 \times -10\%$

$= 8\%$

De la fórmula de E_m → $\Delta\% X^3 = \varepsilon_m . \Delta\% m^3$

$= 1{,}2 \times -10\%$

$= -12\%$

Año 4:

De la fórmula de E_p → $\Delta\% X^4 = \varepsilon_p . \Delta\% p^4$

$= -0{,}8 \times 5{,}56\%$

$= -4{,}44\%$

De la fórmula de E_m → $\Delta\% X^4 = \varepsilon_m . \Delta\% m^4$

$= 1{,}2 \times 18{,}95\%$

$= 22{,}74\%$

Entonces, la demanda proyectada:

Años	**Δ % X debido a ϵ_p**	**Δ % X debido a ϵ_m**	**Δ%X TOTAL**	**Demanda Proyectada**
0				117.500
1	-13,3	0	-13,3	101.837
2	3,8	24	27,8	130.147
3	8,0	-12	-4,0	124.941
4	-4,44	22,74	18,3	147.468

b) La elasticidad cruzada de la demanda del maíz nacional (X^n) respecto del precio del maíz importado (Pi) se formula como:

$$\varepsilon_{n,i} = \frac{\Delta\% X^n}{\Delta\% P_i}$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta\% X^n = \varepsilon_{n,i} . \Delta\% P_i \qquad (\alpha)$$

Si la información proporcionada nos dice que:

$$\epsilon_{n,i} = 0.8$$

$$\triangle \%Pi = 10\%$$

⇨ Remplazando estos datos en (α):

$$\triangle \% X^n = 0.8 * 10$$
$$= 8\%$$

Entonces, el año 4 la demanda nacional aumentaría, adicionalmente, 8%.

3. El jefe de cocina de un restaurante se abastece periódicamente de tres insumos. El restaurante tiene el siguiente registro de las compras:

	insumo 1		insumo 2		insumo 3	
	Precio	Cantidad	Precio	Cantidad	Precio	Cantidad
Antes	10	1200	2	90	24	3,800
Después	8	1500	2	105	24	3,100

En base al concepto de elasticidad cruzada ayúdelo a identificar a que bien corresponde cada uno de los datos presentados, si sabe que los bienes comprados son fósforos, gas y kerosene.

Solución:

Como el insumo 1 es el que varía de precio, se debe analizar la elasticidad cruzada de este insumo con respecto a la demanda de los otros insumos para saber si son sustitutos o complementarios.

Se sabe que la fórmula de la elasticidad cruzada es:

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{\Delta X_i / X_i}{\Delta P_j / P_j}$$

Así, la elasticidad cruzada entre los insumos 2 y 1:

$$\varepsilon_{2,1} = \frac{\Delta X_2 / X_2}{\Delta P_1 / P_1}$$

$$= \frac{15/90}{-2/10} = -0{,}83$$

Entonces, de acuerdo al signo, los bienes son complementarios

Asimismo, la elasticidad cruzada entre los insumos 3 y 1:

$$\varepsilon_{3,1} = \frac{\Delta X_3 / X_3}{\Delta P_1 / P_1}$$

$$= \frac{-700/3800}{-2/10} = 0{,}921$$

En este caso, los bienes son sustitutos

En conclusión, según los resultados, el insumo 2 es complementario del insumo 1, y el insumo 3 es su sustituto; por tanto, de acuerdo a la naturaleza de los insumos, el insumo 1 sería kerosene, el insumo 2, fósforos, y el 3, gas.

4.[7]El año pasado, la producción nacional de leche fue de 200.320 TM .mientras que el consumo 237,421 TM.

Para el presente año, el gobierno tiene previsto incrementar el ingreso real de la población en un 10%. Se sabe que cada año el consumo se incrementa 2%, y que la elasticidad ingreso de la leche es de 0,75. Además se conoce que fruto de los avances genéticos por inseminación artificial, la producción aumentará 15%. Basado en esta información, determine si:

a) ¿Será suficientemente abastecido el mercado nacional por la producción interna?.
b) ¿Se reducirán o incrementaran las importaciones?.¿en cuánto?

Solución

a) Variación de la demanda nacional

Para calcular la variación de la demanda de leche debido al incremento del ingreso, se recurre al concepto de elasticidad ingreso de la leche:

$$\varepsilon_{m,L} = \frac{\Delta\%X_L}{\Delta\%m}$$

Donde:

---

[7] UNA-La Molina. Curso Análisis Microeconómico. A. Ortíz

$\epsilon_{m,L}$ = elasticidad ingreso de la leche
$\Delta\%X_L$ = variación porcentual de la demanda de leche
$\Delta\%m$ = variación porcentual del ingreso

Entonces:

$$\Delta\%X_L = \varepsilon_{m,L}\ \Delta\%m$$

Reemplazando datos:

$$\Delta\%X_L = 0{,}75 \times 10$$
$$= 7{,}5\%$$

La demanda nacional, por efecto del aumento del ingreso, aumentará 7,5%, a lo que habría que agregarle el 2% de incremento natural anual, en consecuencia, en total, la demanda aumentará 9,5%.

O sea, la demanda nacional será: 259.976 TM. (237.421*1,095)

Por otro lado, la producción interna será: 230,368 TM. (200.320*1,15).

Entonces, la producción nacional será insuficiente.

b) El año pasado se importaron 37.101 TM (237.421 - 200.320)

Este año se tendrá que importar 29.608 TM. (259.976-230.368)

Por lo tanto, las importaciones se reducirán en 7.493 TM, esto es, el 20,2% de lo importado el año pasado.

5. Un consumidor destina todo su ingreso, en partes iguales, al consumo de dos bienes: X_1 y X_2. Si la elasticidad cruzada de los bienes es $\epsilon_{2,1} = 1$, determine ¿cuál es la elasticidad precio del bien X_1?.

Solución:

En la restricción presupuestaria:

$$m = p_1X_1 + p_2 X_2$$

Determinamos, matemáticamente, el efecto de un cambio en el precio de X_1:

$$\frac{\partial m}{\partial p_1} = X_1 + p_1 \frac{\partial X_1}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial X_2}{\partial p_1}$$

Si en el 2° miembro, realizamos un artificio que no alterará la expresión:

$$\frac{\partial m}{\partial p_1} = X_1 + p_1 \frac{\partial X_1}{\partial p_1}\left\langle \frac{X_1}{X_1} \right\rangle + p_2 \frac{\partial X_2}{\partial p_1}\left\langle \frac{p_1}{X_2} \right\rangle\left\langle \frac{X_2}{p_1} \right\rangle$$

Asociando términos, en la expresión identificamos $\epsilon_{p,1}$ y $\epsilon_{2,1}$:

$$\frac{\partial m}{\partial p_1} = X_1 + X_1\left[\frac{\partial X_1}{\partial p_1} \frac{p_1}{X_1} \right] + p_2\left[\frac{\partial X_2}{\partial p_1} \frac{p_1}{X_2} \right]\frac{X_2}{p_1}$$

Luego, reemplazando,

$$\frac{\partial m}{\partial p_1} = 0 \qquad y \qquad \varepsilon_{p,1} = 1,$$

Se obtiene:

$$0 = X_1 + X_1\varepsilon_{p,1} + p_2 [1]\frac{X_2}{p_1}$$

Despejando $\epsilon_{p,1}$:

$$\varepsilon_{p,1} = -1 - \frac{p_2 X_2}{p_1 X_1}$$

Finalmente, como el gasto en ambos bienes son iguales

$$\varepsilon_{p,1} = -1 - 1$$

$$\varepsilon_{p,1} = -2$$

6. Si la demanda de cierta bebida espirituosa responde a la función:

$$\text{Ln } X = 10 - P^{0.5}$$

Determine la elasticidad precio de la demanda cuando el precio baja de S/. 16.00 a S/. 15.21

Solución

Demanda cuando P = 16 :

$$\text{Ln } X = 10 - (16)^{0.5}$$

$$\text{Ln } X = 10 - 4$$

$$\text{Ln } X = 6$$

$$X = e^{6}$$

$$X = 403.43$$

Demanda cuando P = 15.21 :

$$\text{Ln } X = 10 - (15.21)^{0.5}$$

$$\text{Ln } X = 10 - 3.9$$

$$\text{Ln } X = 6.1$$

$$X = e^{6.1}$$

$$X = 445.86$$

Entonces

$$\varepsilon_p = \frac{\Delta X}{\Delta p}\,\frac{p}{X}$$

$$\varepsilon_p = \frac{445{,}86 - 403{,}43}{16 - 15{,}21}\;\frac{16}{403{,}43}$$

$$\varepsilon_p = \frac{42{,}43}{-0{,}79}\;(0{,}03966)$$

$$\varepsilon_p = -2{,}13$$

7. El mercado del bien Y tiene las funciones de demanda y oferta siguientes:

$$p^d = (14 - Y)^{0,5}$$

$$p^o = Y - 2$$

a) Halle el equilibrio del mercado. Grafique.
b) Encuentre la elasticidad precio de la demanda en el punto de equilibrio.
c) Calcule el excedente del consumidor. Grafique

Solución:

a) Equilibrio del mercado:

$$p^d = p^o$$

$$(14 - Y)^{0,5} = Y - 2$$

$$14 - Y = (Y - 2)^2$$

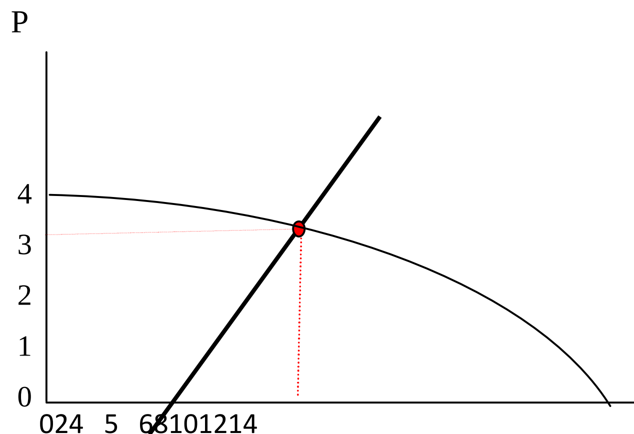
$$Y^2 - 3Y - 10 = 0$$

$$Y = 5 \quad y \quad Y' = -2$$

Punto de equilibrio:

$$p = 3$$
$$Y = 5$$

Gráfico. Equilibrio del mercado



b) La elasticidad precio de la demanda en el punto de equilibrio

$$\varepsilon_p = \frac{\partial Y}{\partial P}\frac{P}{Y}$$

Hallando $\frac{\partial Y}{\partial P}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial Y} = 0{,}5(14 - Y)^{-0{,}5}(-1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = 0{,}5(14 - 5)^{-0{,}5}(-1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = -\frac{0{,}5}{3}$$

Entonces,

$$\frac{\partial Y}{\partial P} = \frac{3}{0{,}5} = -6$$

Remplazando:

$$\varepsilon_p = -6\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\varepsilon_p = -3{,}6$$

c) Excedente del consumidor

Como $$p^d = 3$$

Entonces: $$(14 - Y)^{0{,}5} = 3$$

$$14 - Y = 9$$

$$Y = 5$$

Luego, el EC:

$$EC = \int_0^5 pdY \quad -(3)(5)$$

$$EC = \int_0^5 (14 - Y)\,dY \quad - 15 \qquad \ldots (\alpha)$$

Cambiando de variable:

$$U = 14 - Y \qquad \ldots (\beta)$$

Derivando ambos términos:

$$dU = - dY \qquad \ldots (\gamma)$$

Remplazando (β) y (γ) en (α):

$$EC = \int_0^5 U\,(-dU) \quad - 15$$

$$EC = -\int_0^5 U\,(dU) \quad - 15$$

Integrando:

$$EC = -\left.\frac{U^{1,5}}{1,5}\right|_0^5 \quad - 15 \qquad \ldots (\varphi)$$

Reemplazando (β) en (φ)y efectuando:

$$EC = -\left.\frac{(14 - Y)^{1,5}}{1,5}\right|_0^5 \quad - 15$$

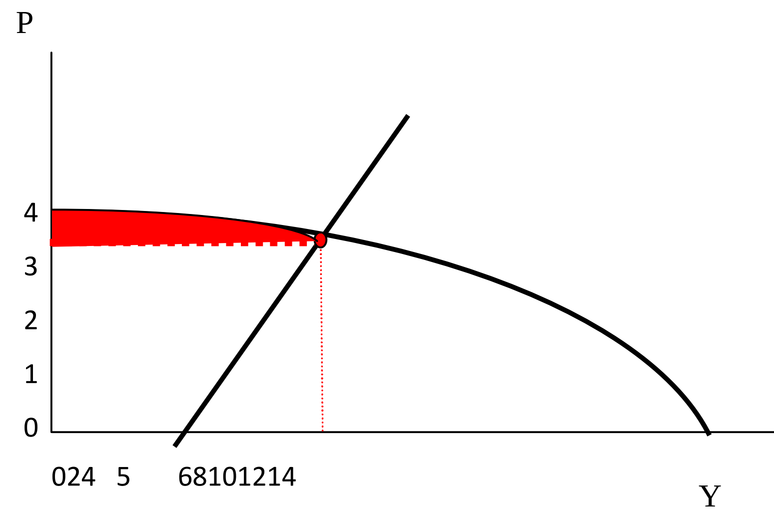
$$EC = -\left[\frac{27}{1,5} - \frac{52,4}{1,5}\right] \quad - 15$$

$$EC = -[18 - 34,93] \quad - 15$$

$$EC = -[-16,93] \quad - 15$$

$$EC = 1,93$$

Gráfico. Excedente del consumidor



1.7. Elasticidad y propiedades de la función de demanda

1. Dada la siguiente función de utilidad de un consumidor:

$$U(x_1,x_2) = \text{Ln } x_1 + 2x_2$$

Verifique el cumplimiento de las condiciones de las funciones de demanda

a) Agregación de Engel
b) Agregación de Cournot
c) Homogeneidad

Solución:

Las funciones de demanda del consumidor son:

$$x_1 = \frac{p_2}{2p_1} \quad (1) \qquad\qquad x_2 = \frac{2m - p_2}{2p_2} \quad (2)$$

a) Condición de Agregación de Engel

$$w_1\varepsilon_{m1} + w_2\varepsilon_{m2} = 1 \qquad (3)$$

$$\varepsilon_{m1} = \frac{\partial x_1}{\partial m_1}\frac{m}{x_1} = 0$$

$$\varepsilon_{m2} = \frac{\partial x_2}{\partial m_2}\frac{m}{x_2} = \frac{1}{p_2}\frac{m}{\frac{2m - p_2}{2p_2}} = \frac{2mp_2}{(2m - p_2)p_2} = \frac{2m}{2m - p_2}$$

Reemplazando para demostrar (3):

$$\rightarrow \qquad w_1 \ (0) \ + \ w_2 \frac{2m}{2m - p_2}$$

$$\rightarrow \qquad \frac{p_2 x_2}{m}\frac{2m}{2m - p_2} = \frac{2p_2 x_2}{2m - p_2} \qquad (4)$$

De (2) obtenemos:

$$2p_2 x_2 = 2m - p_2 \qquad (5)$$

Con el reemplazo de (5) en (4), se llega a la demostración:

$$\frac{2p_2x_2}{2p_2x_2} = 1$$

b) Condición de Agregación de Cournot

i. $w_1\varepsilon_{11} + w_2\varepsilon_{21} = -w_1$ (6)

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_1} = -\frac{p_2}{2p_1^2}\frac{p_1}{\frac{p_2}{2p_1}} = -1$$

$$\varepsilon_{21} = \frac{\partial x_2}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_2} = 0$$

Reemplazandoestas elasticidades en (6), se comprueba la agregación de Cournot cuando varía el precio de x_1:

$$w_1\ (-1) + w_2(0) = -w_1$$

ii. $w_1\varepsilon_{12} + w_2\varepsilon_{22} = -w_2$ (7)

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial x_1}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_1} = -\frac{1}{2p_1}\frac{p_2}{\frac{p_2}{2p_1}} = 1$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial x_2}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_2} = -\frac{m}{p_2^2}\frac{p_2}{\frac{2m-p_2}{2p_2}} = -\frac{2m}{2m-p_2}$$

Luego, reemplazandoε_{12}y ε_{22}en el primer miembro de (7):

$$w_1\ (1) + w_2(-\frac{2m}{2m-p_2})$$

Finalmente, remplazando w_2 y (5) y reduciendo, se obtiene:

$$w_1 \; + \; \frac{p_2 x_2}{m}(-\frac{2m}{2p_2 x_2})$$

$$w_1 \; -1$$

Sabemos que $w_1 + w_2 = 1$, entonces, haciendo los traslados respectivos:

$$w_1 \; -1 \; = -w_2$$

Por tanto, se demuestra la condición de Cournot cuando varía el precio de x_2

c) Condición de homogeneidad

Para ambos casos, reemplazando los valores de las elasticidades, anteriormente calculados, obtenemos:

a) $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{m1} = 0$

(-1) + (1) + (0) = 0

b) $\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{m2} = 0$

$$(-\frac{2m}{2p_2x_2}) \; + \; (0) \; + \; (\frac{2m}{2m-p_2}) \; = \; 0$$

2. Las preferencias de un consumidor están expresadas en la función de utilidad siguiente:

$$U(x_1, x_2) = (x_1\text{-}2)\,(x_2\text{+}4)$$

Compruebe:

a) La condición de Agregación de Engel
b) La Condición de Agregación de Cournot

Solución:

Previamente se hallan las funciones de demanda ordinaria del consumidor:

$$x_1 = \frac{m + 2p_1 + 4p_2}{2p_1} \quad \ldots (1)$$

$$x_2 = \frac{m - 2p_1 - 4p_2}{2p_2} \quad \ldots \quad (2)$$

a) Condición de Agregación de Engel

$$w_1\varepsilon_{m1} + w_2\varepsilon_{m2} = 1 \qquad (3)$$

Hallamos las elasticidades:

$$\varepsilon_{m1} = \frac{\partial x_1}{\partial m}\frac{m}{x_1} = \frac{1}{2p_1}\frac{m}{\frac{m + 2p_1 + 4p_2}{2p_1}} = \frac{m}{m + 2p_1 + 4p_2}$$

$$\varepsilon_{m2} = \frac{\partial x_2}{\partial m}\frac{m}{x_2} = \frac{1}{2p_2}\frac{m}{\frac{m - 2p_1 - 4p_2}{2p_2}} = \frac{m}{m - 2p_1 - 4p_2}$$

De las funciones de demanda, se obtiene:

$$m + 2p_1 + 4p_2 = 2p_1x_1 \qquad (4) \qquad y$$

$$m - 2p_1 - 4p_2 = 2p_2x_2 \qquad (5)$$

Remplazando w_1 , w_2, (4) y (5) en el primer miembro de (3), obtenemos:

$$\rightarrow \quad \frac{p_1 x_1}{m}\left(\frac{m}{2p_1 x_1}\right) + \frac{p_2 x_2}{m}\left(\frac{m}{2p_2 x_2}\right)$$

Simplificando:

$$\rightarrow \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

l.q.q.d.

b) Condición de Agregación de Cournot

i. $w_1 \varepsilon_{11} + w_2 \varepsilon_{21} = - w_1$ (6)

Hallamos las elasticidades:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_1} = (-\frac{m}{2p_1^2} - \frac{2p_2}{p_1^2})(\frac{p_1}{\frac{m+2p_1+4p_2}{2p_1}})$$

$$= -(\frac{m+4p_2)}{2p_1^2})(\frac{p_1}{\frac{m+2p_1+4p_2}{2p_1}}) = -\frac{(m+4p_2)}{m+2p_1+4p_2}$$

$$\varepsilon_{21} = \frac{\partial x_2}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_2} = (-\frac{1}{p_2})(\frac{p_1}{\frac{m-2p_1-4p_2}{2p_2}}) = -\frac{2p_1}{m-2p_1-4p_2}$$

Reemplazando en (6), obtenemos:

$$w_1 \ (-\frac{m+4p_2}{m+2p_1+4p_2}) + w_2(-\frac{2p_1}{m-2p_1-4p_2})$$

Luego, despejando de (1), y factorizando, obtenemos:

$$m + 4p_2 = 2p_1 x_1 - 2p_1$$
$$(7) = 2p_1(x_1 - 1)$$

Entonces, reemplazando (4), (5), (7), w_1 y w_2, en (6), obtenemos:

$$\frac{p_1 x_1}{m}\left(-\frac{2p_1(x_1-1)}{2p_1 x_1}\right) + \frac{p_2 x_2}{m}\left(-\frac{2p_1}{2p_2 x_2}\right)$$

Simplificando y factorizando:

$$-\frac{p_1(x_1-1)}{m} - \frac{p_1}{m}$$
$$\frac{-p_1 x_1 + p_1 - p_1}{m}$$

$$-\frac{p_1 x_1}{m} = -w_1$$

l.q.q.d.

ii. $w_1 \varepsilon_{12} + w_2 \varepsilon_{22} = -w_2$ (8)

Se hallan las elasticidades:

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial x_1}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_1} = \left(-\frac{2}{p_1}\right)\left(\frac{p_2}{\frac{m+2p_1+4p_2}{2p_1}}\right)$$

$$= \frac{4p_2}{m+2p_1+4p_2} = \frac{4p_2}{2p_1 x_1}$$

$$\varepsilon_{21} = \frac{\partial x_2}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_2} = \left(-\frac{m}{2p_2^2} + \frac{p_1}{p_2^2}\right)\left(\frac{p_2}{\frac{m-2p_1-4p_2}{2p_2}}\right)$$

$$= \left(-\frac{m+2p_1}{2p_2^2}\right)\left(\frac{2p_2^2}{m-2p_1-4p_2}\right)$$

Simplificando, ordenando y remplazando (5):

$$\varepsilon_{21} = \frac{2p_1 - m}{2p_2 x_2}$$

Haciendo los reemplazos respectivos en (8), se obtiene:

$$\left(\frac{p_1 x_1}{m}\right)\left(\frac{4p_2}{2p_1 x_1}\right) + \left(\frac{p_2 x_2}{m}\right)\left(\frac{2p_1 - m}{2p_2 x_2}\right)$$

Simplificando y reduciendo:

$$\frac{2p_2}{m} + \frac{2p_1 - m}{2m}$$

$$\frac{(4p_2 + 2p_1 - m)}{2m}$$

$$\frac{-(m - 2p_1 - 4p_2)}{2m}$$

Reemplazando (5), y simplificando:

$$\frac{-2p_2 x_2}{2m} = -w_2$$

l.q.q.d.

3. Un consumidor tiene la siguiente función de utilidad:

$$U(x_1,x_2) = x_1^{1/2} + x_2$$

a)Demuestre la Agregación de Engel
b) Demuestre la Agregación de Cournot
c) Demuestre la Condición de Homogeneidad

Solución:

Primero, hallamos las funciones de demanda del consumidor:

$$x_1 = \left(\frac{p_2}{2p_1}\right)^2 \qquad \ldots (1)$$

… (2) $$x_2 = \frac{4mp_1 - p_2^2}{4p_1 p_2}$$

a) Condición de Agregación de Engel

$w_1\varepsilon_{m1} + w_2\varepsilon_{m2} = 1$ (3)

$$\varepsilon_{m1} = \frac{\partial x_1}{\partial m_1}\frac{m}{x_1} = 0$$

$$\varepsilon_{m2} = \frac{\partial x_2}{\partial m}\frac{m}{x_2} = \frac{1}{p_2}\frac{m}{\frac{4mp_1 - p_2^2}{4p_1 p_2}}$$

$$= \frac{4p_1 m}{4mp_1 - p_2^2}$$

Remplazando elasticidades para demostrar (3):

$$\rightarrow \quad w_1 \ (0) + w_2\left(\frac{4p_1 m}{4mp_1 - p_2^2}\right) \quad (4)$$

De (2) obtenemos:

$$4p_1 p_2 x_2 = 4mp_1 - p_2^2 \quad (5)$$

Remplazando (5) en (4), y simplificando, se obtiene lo que se pide demostrar:

$$\frac{p_2 x_2}{m}\frac{4p_1 m}{4p_1 p_2 x_2} = 1$$

b) Condición de Agregación de Cournot

i. Cuando varía p_1:

$w_1\varepsilon_{11} + w_2\varepsilon_{21} = -w_1$ (6)

Primero hallamos las elasticidades:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_1} = \left(-\frac{2p_2^2}{4p_1^3}\right)\left(\frac{p_1}{\frac{p_2^2}{4p_1^2}}\right) = -2$$

$$\varepsilon_{21} = \frac{\partial x_2}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_2} = \left(\frac{p_2}{4p_1^2}\right)\frac{p_1}{\frac{4mp_1 - p_2^2}{4p_1 p_2}}$$

$$= \frac{p_2^2}{4mp_1 - p_2^2}$$

Remplazandolas en el lado izquierdo de (6):

$$w_1\ (-2) \quad + \quad w_2\left(\frac{p_2^2}{4mp_1 - p_2^2}\right)$$

Empleando (5), desdoblando w_2, y simplificando, se obtiene:

$$-2w_1 + \frac{p_2 x_2}{m}\left(\frac{p_2^2}{4p_1 p_2 x_2}\right)$$

$$-2w_1 \quad + \quad \frac{p_2^2}{4mp_1}$$

Luego, tomando de función de demanda:

$$p_2^2 = 4p_1^2 x_1$$

Remplazando y simplificando:

$$-2w_1 + \frac{4p_1^2 x_1}{4mp_1}$$

$$-2w_1 + \frac{p_1 x_1}{m}$$

$$-2w_1 + w_1$$

$$-w_1 \qquad\qquad l.q.q.d.$$

ii. Cuando varía p_2:

$w_1 \varepsilon_{12} + w_2 \varepsilon_{22} = -w_2$ (7)

Las elasticidades:

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial x_1}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_1} = \left(\frac{p_2}{2p_1^2}\right)\frac{p_2}{\frac{p_2^2}{4p_1^2}} = 2$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial x_2}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_2} = \left(-\frac{m}{2p_2^2} - \frac{1}{4p_1}\right)\left(\frac{p_2}{\frac{4mp_1 - p_2^2}{4p_1 p_2}}\right)$$

Simplificando:

$$\varepsilon_{22} = -\left(\frac{4mp_1 + p_2^2}{4p_1 p_2^2}\right)\left(\frac{4p_1 p_2^2}{4mp_1 - p_2^2}\right)$$

$$= -\frac{4mp_1 + p_2^2}{4mp_1 - p_2^2}$$

Reemplazando,en (7), las elasticidades halladas:

$$w_1\ (2) + w_2\left(-\frac{4mp_1 + p_2^2}{4mp_1 - p_2^2}\right)$$

Luego, reemplazando w_2 y (5), y reduciendo:

$$2w_1 + \frac{p_2 x_2}{m}\left(-\frac{4mp_1 + p_2^2}{4p_1 p_2 x_2}\right)$$

$$2w_1 - 1 - \frac{p_2^2}{4mp_1}$$

Finalmente, remplazando:

$$p_2^2 = 4p_1^2x_1$$

$$2w_1 - 1 \quad - \quad \frac{4p_1^2x_1}{4mp_1}$$

Simplificando:

$$2w_1 - 1 \quad - \quad \frac{p_1x_1}{m}$$

$$2w_1 - 1 \quad - \quad w_1$$

$$w_1 - 1 = -w_2 \qquad \text{l.q.q.d.}$$

c) Condición de homogeneidad

Para ambos casos, reemplazando los valores de las elasticidades, anteriormente calculados, obtenemos:

i. $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{m1} = 0$

$$(-2) + (2) + (0) = 0$$

ii. $\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{m2} = 0$

$$\left(\frac{p_2^2}{4mp_1 - p_2^2}\right) + \left(-\frac{4mp_1 + p_2^2}{4mp_1 - p_2^2}\right) + \left(\frac{4p_1m}{4mp_1 - p_2^2}\right)$$

$$\left(\frac{p_2^2 - 4mp_1 - p_2^2 + 4p_1m}{4mp_1 - p_2^2}\right) = 0 \qquad l.q.q.d.$$

1.8. RIESGO E INCERTIDUMBRE

1. Una persona tiene preferencias que pueden ser expresadas por una función de utilidad cuya expresión es:

$$U(w) = W^{1/3}$$

Donde:

W = riqueza total

Su riqueza inicial asciende a $ 8

Si la persona recibe un boleto de lotería cuyo premio mayor es $ 56 con probabilidad 0.5 , y $0 con probabilidad 0.5. Determine:

a) ¿A cuánto asciende su valor esperado luego de recibir el boleto de lotería?
b) ¿En cuánto valora el juego el individuo?
c) ¿Qué puede decirse acerca de la actitud de esta persona frente al riesgo?
d) ¿Cuál es el precio más bajo al cuál vendería el boleto? ¿a cuánto asciende la prima?

Soluciòn

En este caso haciendo uso de la función de utilidad y de los datos, obtenemos el siguiente cuadro:

Premio	Probabilidad	Utilidad	Riqueza
56	0.5	4	64
0	0.5	2	8

a) $VE = 56\,(0.5) + 0\,(0.5)$

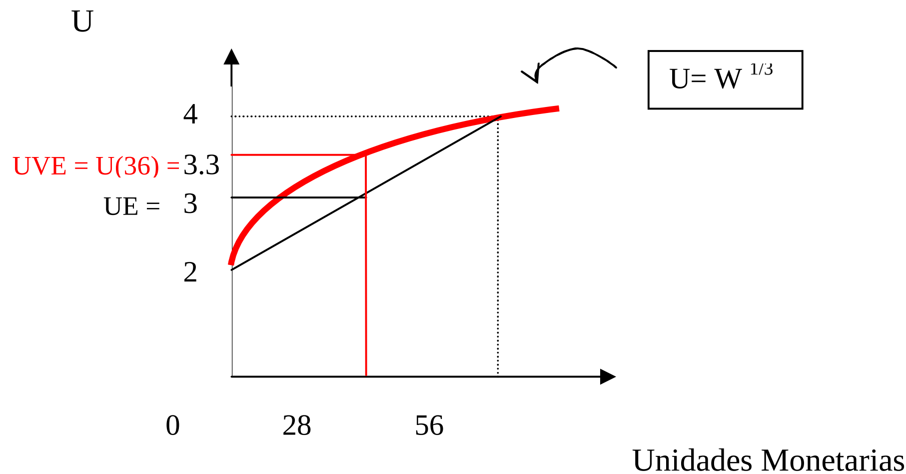
$= 28$

b) $UE = 4\,(0.5) + 2\,(0.5)$

$= 3$

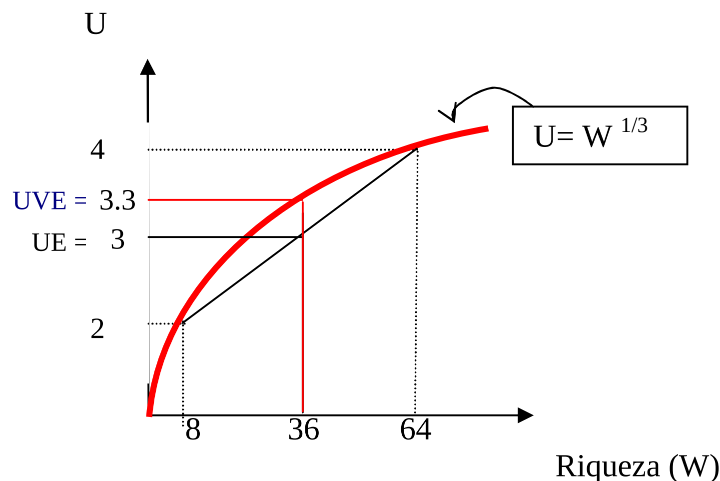
b) Para determinar su actitud ante el riesgo hay que hallar la utilidad del valor esperado, a través de la FUVE:

$$UVE = U(28 + 8) = (36)^{1/3} = 3.3$$



Entonces se determina que el juego o lotería brinda al individuo una utilidad –representadada por la UE- de 3, mientras que si le ofrecen el equivalente cierto o Valor Esperado (28), este monto le reporta una utilidad de 3,3 (UVE). Es decir valora más lo seguro que el juego, por tanto es adverso al riesgo.

El gráfico también se puede presentar ploteando, en el eje de las abscisas, la riqueza en lugar de los premios, así:



c) Si a esta persona le ofrecen un monto P que le reporta una utilidad de 3, se mostrará indiferente entre jugar o recibir este monto, así:

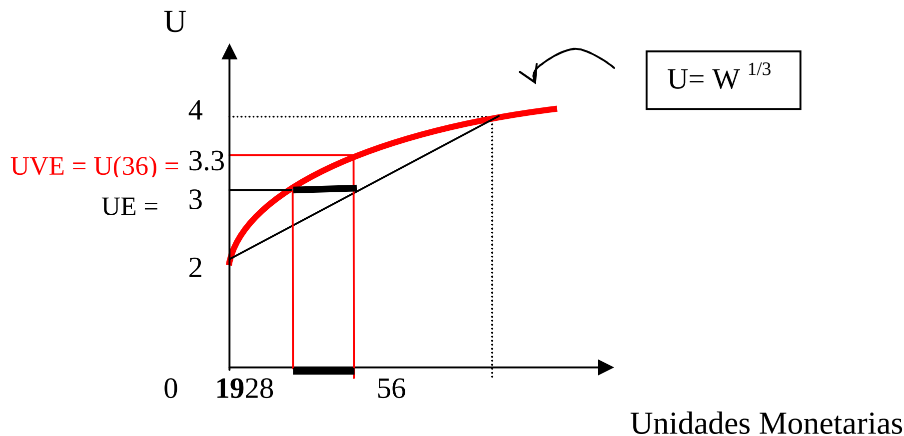
$$U(P+8) = (P+8)^{1/3} = 3$$

Entonces,

$$P + 8 = 27$$

$$P = 19$$

El precio mínimo al cual vendería esta persona estaría muy cercano a $P > 19$



La prima está en el rango: $0 < \text{prima} < 9$

En el gráfico está representada por el trazo grueso y oscuro entre 19 y 28.

2. En una playa privada del sur solo pueden ingresar los que adquieran una tarjeta que cuesta $10, lo que le da derecho de llevar 5 invitados y disfrutar de los espectáculos. Los que no cuenten con tarjeta y sean sorprendidos pagarán, adicionalmente, una penalidad de $25. La probabilidad de que lo descubran es de 25%.

   Jacobo ama esta playa pero no le sobra el dinero. Si su función de utilidad es la siguiente:

$$U(W) = W^{1/2}$$

   donde W representa su riqueza total que asciende a $1000, determine:

   a) Si Jacoboingresará a la playa con tarjeta o sin ella
   b) Dado que Jacabo no es muy desprendido ¿cuál debería ser el costo de la tarjeta a fin de que prefiera comprar la tarjeta y no estar en falta?
   c) ¿Cuál debería ser el monto de la multa que lo incline a comprar la tarjeta?
   d) Si el municipio no autoriza el incremento de la multa, debería mejorarse el sistema de detección ¿En cuánto debería mejorar?

Solución

a)

Caso	**Probab.**	**Riqueza**	**Utilidad**
1. SIN TARJETA			
1.1.Descubierto	0.25	965	31,064
1.2.No descubierto	0.75	1000	31,623
2. CON TARJETA	1,0	990	31,464

Caso SinTarjeta

Valor Esperado =965 (0.25) + 1000 (0.75)

= 991,25

Utilidad Esperada = 31,064 (0.25) + 31,623 (0.75)

= 7,766 + 23,717

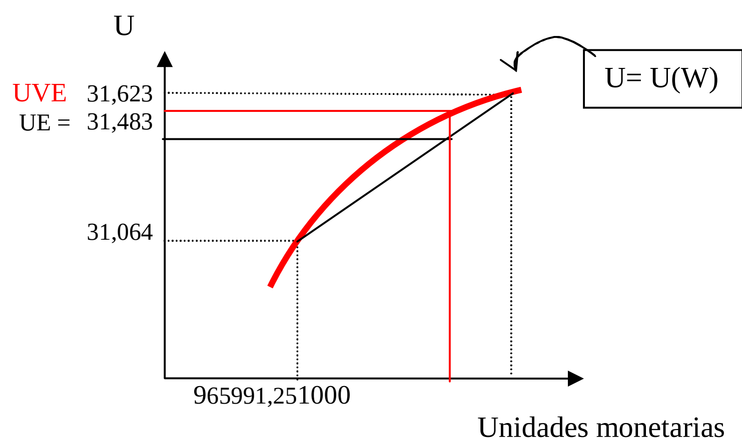
= 31,483

Utilidad del Valor Esperado:

= $(991,25)^{1/2}$

= 31,484

Gráfico. Opción Sin Tarjeta



La opción de ingresar a la playa sin tarjeta le representa una lotería que le brinda una utilidad de 31,483 (UE)

Caso con Tarjeta

La compra de la tarjeta le proporciona a Jacobo una utilidad invariable de 31,464

Por tanto, dado que:

$$31{,}483 > 31{,}464$$

$$U_{ST} > U_{CT}$$

Jacobo ingresará a la playa sin comprar la tarjeta

a) Jacobo revocará su decisión si le ofrecen un monto que le otorga una utilidad mayor a la que obtiene si no compra la tarjeta (U_{ST} = 31,483). Este monto X se calcula a través de la relación:

$$U(X) = X^{0,5} = 31{,}483$$

$$X = (31{,}483)^2$$

$$X = 991{,}19$$

y el costo de la tarjeta (C), a través de:

$$1000 - C > 991{,}19$$

$$C < 1000 - 991{,}19$$

$$C < 8{,}81$$

b) Si T es el monto de la multa, tendríamos:

Caso	Probab.	Riqueza	Utilidad
1. SIN TARJETA			
1.1. Descubierto	0.25	1000-T	$(1000-T)^{0,5}$
1.2. No descubierto	0.75	1000	31,623
2. CON TARJETA	1,0	990	31,464

Si la multa coloca a Jacobo en una situación de indiferencia, entonces UE = 31,464; así, se tendrá que:

$$(1000\text{-T})^{0,5}\ (0,25) + 31,623\ (0,75) = 31,464$$

$$(1000 - T)^{0,5} = \frac{31,464 - 23,71725}{0,25}$$

$$(1000 - T)^{0,5} = 30,987$$

$$(1000 - T) = 960,194$$

$$T = 39,81$$

Entonces para que la utilidad de la compra de la tarjeta sea mayor:

$$T > 39,81$$

c) Si la multa no se puede incrementar, habrá que mejorar las probabilidades de control a fin de inducir a la compra de la tarjeta, entonces tendremos que:

Caso	Probab.	Riqueza	Utilidad
1. SIN TARJETA			
1.1. Descubierto	p	965	31,064
1.2. No descubierto	(1 - p)	1000	31,623
3. CON TARJETA	1,0	990	31,464

Partiendo de una situación de indiferencia:

$$31,064(p) + 31,623(1 - p) = 31,464$$

$$0,559\,p = 0,159$$

$$p = 0,2844 \cong 28,44\%$$

Finalmente,

$$p \succ 28,44\%$$

Entonces una probabilidad de detección superior a 28,44% hará que la utilidad de comprar la tarjeta supere a la utilidadde infringir la norma.

3. Mario Tello trabaja en un Apiario donde gana S/ 1.000 mensuales y recibe dos gratificaciones anuales equivalentes a un sueldo cada una. Mario está cansado de las picaduras y del bajo ingreso que percibe, y evalúa cambiar de trabajo. Tiene pensado instalar una tienda naturista donde tiene la posibilidad de ganar S/ 8.000 al año con una probabilidad de 60%, o ganar S/ 36,000 al año con una probabilidad de 40%

   Si Mario tiene una función de utilidad cuya expresión es:

$$U(w) = w^{\frac{27}{100}}$$

   Determine:

   a) Si Mario dejará su trabajo actual
   b) Si le ofrecen un trabajo en un vivero donde ganaría S/ 19.000 por año ¿Qué decidirá Mario?
   c) ¿Cuál debería ser el sueldo que haría que a Mario le de igual trabajar en el vivero o trabajar en su tienda naturista?

Solución

a) La utilidad que obtiene en su trabajo actual es:

$$U(16.800) = (14.000)^{\frac{27}{100}}$$

$$U = 13{,}166$$

La utilidad que obtendría con la tienda naturista vendría a ser la Utilidad Esperada:

$$UE = \left[8.000^{\frac{27}{100}}\right](0{,}6) + \left[46.000^{\frac{27}{100}}\right](0{,}4)$$

$$UE = 11{,}3196\ (0{,}6) + 18{,}1528\ (0{,}4)$$

$$UE = 6{,}792 + 7{,}261$$

$$UE = 14{,}05$$

Mario dejará su actual empleo.

b) El trabajo en el vivero que le promete un pago anual de S/. 21.000, le brindará una utilidad de:

$$U(21.000) = (21.000)^{\frac{27}{100}}$$

$$U = 14,69$$

Este empleo, en términos de utilidad, será más beneficioso para Mario

c) El ingreso(R) que haría que Mario se muestre indiferente entre su trabajo en una tienda naturista o trabajar en un Vivero, debe satisfacer la expresión siguiente:

$$U(R) = R^{\frac{27}{100}} = 14,05$$

Resolviendo

$$R = (14,05)^{\frac{100}{27}}$$

$$R = 17.809,55$$

4. Un inversionista tiene en cartera dos proyectos que prometen una atractiva rentabilidad. El proyecto 1 requiere una inversión de \$ 5.000, y luego de un año redituaráun ingreso neto de \$25,000. El proyecto 2, un poco más grande, implica una inversión de \$15,000 para obtener a fin de año un monto neto de \$35,000 . La probabilidad de que un proyecto cualquiera tenga éxitoes de 60%. Determine:

a) ¿Por cuál proyecto se decidirá el inversionista?
b) Si el proyecto 1 fuese dejado de lado ¿Cuál debería ser la ganancia que tendría que ofrecer a fin de interesar al inversionista?
c) El Estado busca desalentar los proyectos tipo 2 porque contaminan el ambiente ¿de qué monto debería ser el impuesto que se le tendría que cargar a estos proyectos a fin de favorecer a los proyectos tipo1?
d) ¿Cuál debería ser la probabilidad de éxito de los proyectos si se quiere beneficiar por igual las inversiones en ambos proyectos?

Solución

a) Analizando ambos proyectos

Proyecto 1

	Riqueza	Probabilidad
Éxito	25.000	0,6
Fracaso	-5.000	0,4

$VE^1 = 25.000\ (0,6)\ - 5000\ (0,4)$

$VE^1 = 13.000$

Proyecto 2

	Riqueza	Probabilidad
Éxito	35.000	0,6
Fracaso	-15.000	0,4

$VE^2 = 35.000\ (0,6)\ - 15.000\ (0,4)$

$VE^2 = 15.000$

Entonces, el individuo invertirá en el proyecto 2

b) Para que el proyecto 1 sea indiferente con el proyecto 2, el monto de ganancia solicitado (X) debe permitir obtener un VE de 15.000, entonces

$VE^1 = X\ (0,6)\ - 5.000\ (0,4) = 15,000$

$0,6X = 15.000 + 2.000$

$X = 17.000 / 0.6$

$X = 28.333,33$

Entonces, la ganancia ofrecida será:

$X > 28.333.33$

c) Denominemos T al impuesto, entonces,

$$VE^2 = (35.000 - T)(0,6) - 15.000(0,4) = 13.000$$

$$21.000 - 0,6T - 6.000 = 13.000$$

$$0,6T = 21.000 - 19.000$$

$$T = \frac{3.000}{0,6}$$

$$T = 5,000$$

El Estado tendría que aplicar un impuesto T > 5.000 con el fin de favorecer la inversión en el proyecto 1

d) En este caso se debe cumplir que:

$$25.000\,(q) - 5.000\,(1-q) = 35.000\,(q) - 15.000\,(1-q)$$

$$25.000q - 5.000 + 5.000q = 35.000q - 15.000 + 15.000q$$

$$30.000q - 50.000q = 5.000 - 15.000$$

$$-20.000q = -10.000$$

$$q = 0,5$$

Cuando la probabilidad de éxito (q = 0,5) sea igual a la de fracaso (1-q = 0,5), al inversionista la dará igual invertir en uno u otro proyecto.

5. Un individuo tiene una función de utilidad:

$$U(W) = 5 + 2\,Ln\,(W + 2)$$

Hallar

a) La Medida de aversión absoluta al riesgo de Arrow-Pratt.
b) La Medida de aversión relativa al riesgo de Arrow-Pratt.

Solución

a) La Medida de Aversiónabsoluta al riesgo de Arrow-Pratt es:

$$R(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)}$$

Primeramente, calculamos las derivadas :

- $U'(W) = \frac{2}{W + 2}$
- $U''(W) = -\frac{2}{(W + 2)^2}$

Luego, remplazando y simplificando:

$$R(W) = \frac{1}{W + 2}$$

Dado que R(W) > 0, el individuo es adverso al riesgo, la función de utilidad es cóncava. Se intuye que a medida que la riqueza del individuo aumenta, su aversión al riesgo disminuye.

b) La Medida de aversión relativa al riesgo de Arrow-Pratt

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)}.W$$

Entonces,

$$r(W) = \frac{2W}{W + 2}$$

Este índice de riesgo señala que a medida que la riqueza aumenta, la aversión relativa al riesgo aumenta pero a tasas decrecientes.

6. Colombino, Ortega, Vargas y García van a la Feria de la Molina, a jugar a los gallos,sobretodo a la pelea entre el Ajiseco y el Giro. Cada uno tiene 3.600 para apostar. Si gana el Ajiseco se ofrece pagar S100 por un boleto que cuesta S/ 30 mientras que si le van al Giro ganarán S/ 100 por cada boleto que cuesta S/ 60.

La función de utilidad, que es la misma para todos, es:

$$U(W) = \text{Ln } W$$

Colombino no gusta de los gallos, y no adquiere ningún boleto. Ortega gasta la mitad de sus ingresos comprando el mismo número de boletos por cada gallo. Vargas simpatiza con el Ajiseco y compra el doble de boletos con respecto a los que compró por el Giro.Las preferencias de Garcíalo hacen apostar, con50 boletos, por el Giro, y 20, por el Ajiseco.

Los dos gallos tienen la misma probabilidad de ganar la pelea.

Determine quién de los cuatro tomó la mejor decisión

Solución

- Colombino, al no jugar a los gallos obtendrá la Utilidad Esperada siguiente:

  $$UE = \text{Ln } (3.600)$$

  $$UE = 8{,}1887$$

- En el caso de Ortega, que apuesta por igual a ambos gallos, se establece previamente que:

  A: número de boletos a favor del Ajiseco
  G: número de boletos a favor del Giro

  Luego, los resultados que obtendrá serán:

  Si Gana el Ajiseco

  Riqueza: $3.600 + (100 - 30)A - 60G$

  Si Gana el Giro

  Riqueza: $3.600 + (100 - 60)G - 30A$

  Su restricción presupuestaria será: $30A + 60G = 3.600$

  Como A = G, entonces:

$$30A + 60A = 3.600$$

$$90\ A = 3.600$$

$$A = 40$$

Por tanto

$$G = 40$$

Resumiendo:

Resultado	Riqueza	Probabilidad	Utilidad
Gana Ajiseco	4.000	0,5	8,294
Gana Giro	4.000	0,5	8,294

La Utilidad Esperada será:

$$UE = 8{,}294\ (0{,}5) + 8{,}294\ (0{,}5)$$

$$UE = 8{,}294$$

- La performance de Vargas que le juega al Ajiseco, comprando el doble de los boletos que compra al Giro, será:

Su restricción presupuestaria:

$$30A + 60G = 3.600$$

Como $A = 2G$, entonces:

$$30(2G) + 60G = 3.600$$

$$120G = 3.600$$

$$G = 30$$

Entonces, $A = 60$

Si Gana el Ajiseco

Riqueza: 3.600 + (100-30)(60) -60(30) = 6.000

Si Gana el Giro

Riqueza: 3.600 + (100-60)(30) -30(60) = 3.000

En resumen:

Resultado	**Riqueza**	**Probabilidad**	**Utilidad**
Gana Ajiseco	6.000	0,5	8,6995
Gana Giro	3.000	0,5	8,0064

La Utilidad Esperada:

UE = 8,6995 (0,5) + 8,0064 (0,5)

UE = 8,3529

- García que apuesta 50 boletos por el Giro, y 20, por el Ajiseco:

Si Gana el Ajiseco

Riqueza: 3.600 + (100-30)(20) -60(50) = 2.000

Si Gana el Giro

Riqueza: 3.600 + (100-60)(50) -30(20) = 5.000

En resumen:

Resultado	**Riqueza**	**Probabilidad**	**Utilidad**
Gana Ajiseco	2.000	0,5	7,6009
Gana Giro	5.000	0,5	8,5172

La Utilidad Esperada:

UE = 7,6009 (0,5) + 8,5172 (0,5)

UE = 8,059

La mejor decisión la tomó Vargas que compra 60 boletos a favor del Ajiseco y 30 boletos por el Giro. La segunda alternativa más prometedora es la de Ortega que apuesta por igual a los dos gallos.

II. TEORIA DELA PRODUCCION

2.1. Funciones de ProducciònCobb-Douglass

1. Dada la siguiente función de producción:

$f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$

Se pide:

a) Calcule la función de costos
b) Grafique el costo medio y el costo marginal
c) Halle la función de costos a corto plazo para esta tecnología
d) Determine la función de beneficios
e) Determine la función de oferta de la firma y las demandas no condicionales de cada uno de los factores.
f) Halle la elasticidad de sustitución

Solución

a)

$$\text{Min.} \quad w_1x_1 + w_2 x_2$$
$$\text{s.a:} \quad Ax_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha} = Y$$

$$L = w_1x_1 + w_2 x_2 + \lambda(Y - Ax_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha})$$

$$dL/dx_1 = w_1 - \alpha\lambda.Ax_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} = 0 \quad .....(1)$$

$$dL/dx_2 = w_2 - (1-\alpha)\lambda Ax_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha-1} = 0 \quad .....(2)$$

$$dL/d\lambda = Y - Ax_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} = 0 \quad .....(3)$$

Resolviendo el sistema, se obtiene la relación entre x_1 y x_2:

$$\Rightarrow \quad \frac{w_2}{w_1} = \frac{\alpha\lambda A x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\lambda A x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha}}$$

$$x_1 = \frac{\alpha w_2 \ x_2}{(1-\alpha) w_1} \quad ..... (4)$$

$$x_2 = \frac{(1-\alpha) w_1 \ x_1}{\alpha \ w_2} \quad .... (5)$$

Haciendo los reemplazos respectivos en la restricción, se hallan las demandas condicionales de cada factor. Así, reemplazando (4), se obtiene la demanda condicional del factor x_2 :

$$Y = A\left(\frac{\alpha w_2 x_2}{(1-\alpha) w_1}\right)^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

$$Y = A\left(\frac{\alpha w_2}{(1-\alpha) w_1}\right)^{\alpha} x_2$$

$$x_2 = \frac{Y}{A}\left(\frac{(1-\alpha) w_1}{\alpha \, w_2}\right)^{\alpha}$$

Luego, reemplazando (5), se obtiene la demanda condicional del factor x_1:

$$Y = A x_1^{\alpha}\left(\frac{(1-\alpha) w_1 x_1}{\alpha \, w_2}\right)^{1-\alpha}$$

$$Y = A\left(\frac{(1-\alpha) w_1}{\alpha w_2}\right)^{1-\alpha} x_1$$

$$x_1 = \frac{Y}{A}\left(\frac{\alpha \, w_2}{(1-\alpha) \, w_1}\right)^{1-\alpha}$$

Luego, la función de costos:

$$C = W_1 \frac{Y(\alpha w_2)^{1-\alpha}}{A[(1-\alpha)w_1]^{1-\alpha}} + W_2 \frac{Y[(1-\alpha)w_1]^{\alpha}}{A(\alpha W_2)^{\alpha}}$$

$$C(w,Y) = \frac{Y w_1^{\alpha} w_2^{1-\alpha}}{A}\left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]$$

$$C(w,Y) = \frac{Y w_1^{\alpha} w_2^{1-\alpha}}{A}\left[\frac{\alpha^{\alpha}\alpha^{(1-\alpha)} + (1-\alpha)^{(1-\alpha)}(1-\alpha)^{\alpha}}{(1-\alpha)^{(1-\alpha)}\alpha^{\alpha}}\right]$$

$$C(w,Y) = \frac{Y w_1^{\alpha} w_2^{1-\alpha}}{A}\left[\frac{\alpha + (1-\alpha)}{(1-\alpha)^{(1-\alpha)}\alpha^{\alpha}}\right]$$

$$C(w,Y) = \frac{Y w_1^{\alpha} w_2^{1-\alpha}}{A}\left[\frac{1}{(1-\alpha)^{(1-\alpha)}\alpha^{\alpha}}\right]$$

$$C(w,Y) = \left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w_2}{(1-\alpha)}\right)^{1-\alpha}\frac{Y}{A}$$

b) Gráfica del CMe y CMg

$$CMe = \frac{C}{Y} \qquad y$$

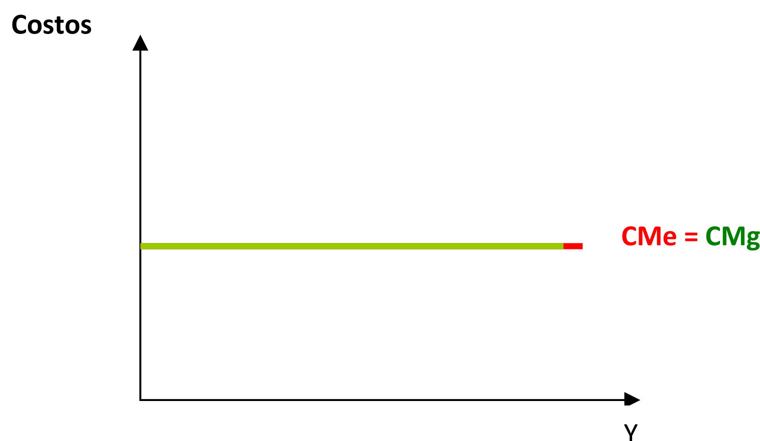
$$CMg = \frac{\partial C}{\partial Y}$$

Entonces,

$$CMe = \left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w_2}{(1-\alpha)}\right)^{1-\alpha} A^{-1}$$

$$CMg = \left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w_2}{(1-\alpha)}\right)^{1-\alpha} A^{-1}$$

Se observa que ambas funciones de costos no contienen a Y, y que, son constantes e iguales, entonces, gráficamente:



c) Función de costos a corto plazo

Para hallar la función de costos a corto plazo, se considera que uno de los factores permanece fijo, por ejemplo $x_1 = \bar{x}_1$, este valor se introduce en la función de producción, y se despeja el otro factor (variable):

$$Y = A\,\bar{x}_1^{\alpha} x_2^{1-a}$$

$$\Rightarrow \qquad x_2 = \left(\frac{Y}{A\bar{x}_1^{\alpha}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Luego, en la ecuación de costos, se reemplazan ambos factores. Así, la función de costos será:

$$C = w_1\bar{x}_1 + w_2(Y/A\bar{x}_1^{\alpha})^{1/(1-\alpha)}$$

CFCV

d) La función de beneficios

A partir de la ecuación de beneficios:

$$\pi = P.Y - C$$

Reemplazando la función de costos, tenemos la función de beneficios:

$$\pi(P,w) = \quad P.Y - \left(\frac{w_1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{w_2}{(1-\alpha)}\right)^{1-\alpha}\frac{Y}{A}$$

2. Dada la siguiente función de producción Cobb-Douglas:

$$f(x_1,x_2) = x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta}$$

a) Calcule la función de costos a largo plazo
b) Grafique el costo medio y el costo marginal
c) Halle la función de costos a corto plazo para esta tecnología
d) Determine la función de beneficios
e) Determine la función de oferta de la firma y las demandas no condicionales de cada uno de los factores.
f) Halle la elasticidad de sustitución

Solución

a) Función de Costos a largo plazo

Primero se hallan las demandas condicionales de los factores. Así, hay que plantear la minimización del costo:

$$\text{Min.} \quad w_1x_1 + w_2x_2$$
$$\text{s.a:} \quad Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta} = Y$$

$$L = w_1x_1 + w_2x_2 + \lambda(Y - Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta})$$

CPO:

$$dL/dx_1 = w_1 - \alpha\lambda.Ax_1^{\alpha-1}x_2^{\beta} = 0$$

$$dL/dx_2 = w_2 - \beta\lambda Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta-1} = 0$$

$$dL/d\lambda = Y - Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta} = 0$$

Resolviendo el sistema, se hallan las relaciones funcionales entre factores:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\alpha\cancel{\lambda}\cancel{A}x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}}{\beta\cancel{\lambda}\cancel{A}x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}}$$

$$x_1 = \frac{\alpha w_2x_2}{\beta w_1} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$x_2 = \frac{\beta w_1x_1}{\alpha w_2} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Para hallar la demanda condicional del factor X_1 se reemplaza (2), en la restricción, y se despeja; así:

$$Y = Ax_1^{\alpha}\left(\frac{\beta w_1x_1}{\alpha w_2}\right)^{\beta} \qquad \Rightarrow \qquad x_1^{\alpha+\beta} = \frac{Y}{A}\left(\frac{\alpha w_2}{\beta w_1}\right)^{\beta}$$

$$x_1 = \left(\frac{\alpha w_2}{\beta w_1}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{Y}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Para hallar la demanda de X_2, se procede de manera similar, reemplazando (1) en la restricción, y despejando:

$$Y = A\left(\frac{\alpha w_2 x_2}{\beta w_1}\right)^{\alpha} x_2^{\beta} \quad \Rightarrow \quad x_2^{\alpha+\beta} = \frac{Y}{A}\left(\frac{\beta w_1}{\alpha w_2}\right)^{\alpha}$$

$$x_2 = \left(\frac{\beta w_1}{\alpha w_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{Y}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Luego, la función de costos:

$$C(w,Y) = w_1\left(\frac{\alpha w_2}{\beta w_1}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{Y}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + w_2\left(\frac{\beta w_1}{\alpha w_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{Y}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

$$C(w,Y) = \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right]\left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} Y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

b) Gráfica del CMe y CMg

$$CMe = \frac{C}{Y} \qquad y \qquad CMg = \frac{\partial C}{\partial Y}$$

Entonces,

$$CMe = w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right] Y^{\frac{1-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}}$$

$$CMg = \left[\frac{1}{\alpha+\beta}\right] w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right] Y^{\frac{1-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}}$$

CASO 1:

Si $\alpha+\beta = 1$

→ R.E. Constantes

CASO 2:

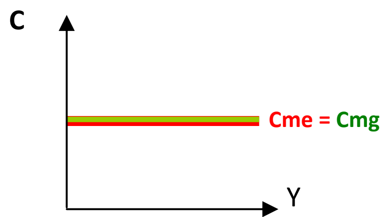
Si $\alpha+\beta > 1$

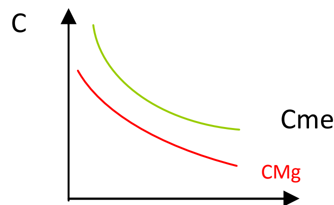
→ R.E. Crecientes

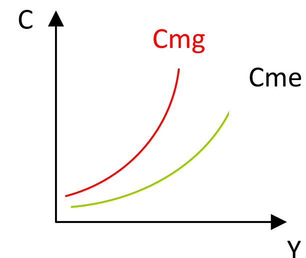
CASO 3:

Si $\alpha+\beta < 1$

→ R.E. Decrecientes







c) Función de costos a corto plazo

Si se considera que uno de los factores de la producción permanece fijo, por ejemplo $x_1 = \bar{x}_1$, entonces, el otro factor - x_2 – será variable, y su función se obtiene despejándola de la función de producción, así:

$$Y = A\,\bar{x}_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

$$x_2 = \left(\frac{Y}{A\bar{x}_1^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

Luego, haciendo los reemplazos respectivos en la ecuación de costos, se obtiene la función de costos a corto plazo:

$$C\,(w,Y) = w_1\bar{x}_1 + w_2 \left(Y/A\bar{x}_1^{\alpha}\right)^{1/\beta}$$

d) **La función de beneficios**

Se sabe que: $\pi = P.Y - C$ ……. (I)

Al reemplazar la función de costos de LP en (I), se tiene que:

$$\pi = P.Y - \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right] \left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} Y^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \quad \text{........} \quad (II)$$

Si al coeficiente de (II) –encerrado en el recuadro rojo- se le denomina K, se tendrá:

$$\pi = P.Y - K\, w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} Y^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \quad \text{........} \quad (II')$$

Luego:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Y} = P - \left[\frac{1}{\alpha+\beta}\right] K\, w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} Y^{\frac{1-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}} = 0$$

Despejando Y:

$$Y^{\frac{1-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}} = P\left[\frac{\alpha+\beta}{K\, w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}\right]$$

$$Y = \left[\frac{P(\alpha+\beta)}{K}\right]^{\frac{(\alpha+\beta)}{1-(\alpha+\beta)}} w_1^{\frac{-\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} w_2^{\frac{-\beta}{1-(\alpha+\beta)}} \quad \text{........} \quad (III)$$

Reemplazando (III) en (II'), y reduciendo:

$$\pi(P,w) = P\left\{\left[\frac{P(\alpha+\beta)}{K}\right]^{\frac{(\alpha+\beta)}{1-(\alpha+\beta)}} w_1^{\frac{-\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} w_2^{\frac{-\beta}{1-(\alpha+\beta)}}\right\} - K w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left\{\left[\frac{P(\alpha+\beta)}{K}\right]^{\frac{(\alpha+\beta)}{1-(\alpha+\beta)}} w_1^{\frac{-\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} w_2^{\frac{-\beta}{1-(\alpha+\beta)}}\right\}^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

$$\pi(P,w)=P\left[\frac{P(\alpha+\beta)}{K}\right]^{\frac{(\alpha+\beta)}{1-(\alpha+\beta)}} w_1^{\frac{-\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} w_2^{\frac{-\beta}{1-(\alpha+\beta)}} - K w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left[\frac{P(\alpha+\beta)}{K}\right]^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}} w_1^{\frac{-\alpha}{[1-(\alpha+\beta)](\alpha+\beta)}} w_2^{\frac{-\beta}{[1-(\alpha+\beta)](\alpha+\beta)}}$$

$$\pi(P,w)=P\left[\frac{P(\alpha+\beta)}{K}\right]^{\frac{(\alpha+\beta)}{1-(\alpha+\beta)}} w_1^{\frac{-\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} w_2^{\frac{-\beta}{1-(\alpha+\beta)}} - K\left[\frac{P(\alpha+\beta)}{K}\right]^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}} w_1^{\frac{-\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} w_2^{\frac{-\beta}{1-(\alpha+\beta)}}$$

$$\pi(P,w)=(\alpha+\beta)^{\frac{(\alpha+\beta)}{1-(\alpha+\beta)}} K^{-\frac{(\alpha+\beta)}{1-(\alpha+\beta)}} P^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}} w_1^{\frac{-\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} w_2^{\frac{-\beta}{1-(\alpha+\beta)}} - (\alpha+\beta)^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}} K^{-\frac{(\alpha+\beta)}{1-(\alpha+\beta)}} P^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}} w_1^{\frac{-\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} w_2^{\frac{-\beta}{1-(\alpha+\beta)}}$$

$$\pi(P,w)=\left[(\alpha+\beta)^{\frac{(\alpha+\beta)}{1-(\alpha+\beta)}} - (\alpha+\beta)^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}}\right] K^{\frac{-(\alpha+\beta)}{1-(\alpha+\beta)}} P^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}} w_1^{\frac{-\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} w_2^{\frac{-\beta}{1-(\alpha+\beta)}}$$

d) Las demandas no condicionales y la función de oferta se hallan a través del Teorema de Hotelling:

$x_i(P,w) = -\,d\pi(P,w)/dw_i$ (demandas no condicionales)

$Y(P,w) = d\pi(P,w)/dP$ (función de oferta)

Si al coeficiente de la función de beneficios se representa con M, se tendrá que:

$$\pi(P,w) = M\, P^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}} w_1^{\frac{-\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} w_2^{\frac{-\beta}{1-(\alpha+\beta)}}$$

---

[8]Algebra de exponentes

- $w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}-\frac{\alpha}{[1-(\alpha+\beta)](\alpha+\beta)}} = w_1^{\frac{\alpha[1-(\alpha+\beta)]-\alpha}{[1-(\alpha+\beta)](\alpha+\beta)}} = w_1^{\frac{-\alpha(\alpha+\beta)}{[1-(\alpha+\beta)](\alpha+\beta)}} = w_1^{\frac{-\alpha}{1-(\alpha+\beta)}}$
- $w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}-\frac{\beta}{[1-(\alpha+\beta)](\alpha+\beta)}} = w_2^{\frac{\beta[1-(\alpha+\beta)]-\beta}{[1-(\alpha+\beta)](\alpha+\beta)}} = w_2^{\frac{-\beta(\alpha+\beta)}{[1-(\alpha+\beta)](\alpha+\beta)}} = w_2^{\frac{-\beta}{1-(\alpha+\beta)}}$

Entonces:

Demanda No condicional del factor x_1:

$$x_1(P,w) = -\frac{\partial \pi(P,w)}{\partial w_1}$$

$$= -\frac{-\alpha}{1-(\alpha+\beta)} MP^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}} w_1^{\frac{\beta-1}{1-(\alpha+\beta)}} w_2^{\frac{-\beta}{1-(\alpha+\beta)}}$$

$$x_1(P,w) = \frac{\alpha}{1-(\alpha+\beta)} MP^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}} w_1^{\frac{\beta-1}{1-(\alpha+\beta)}} w_2^{\frac{-\beta}{1-(\alpha+\beta)}}$$

Demanda No condicional del factor x_2

$$x_2(P,w) = -\frac{\partial \pi(P,w)}{\partial w_2}$$

$$= -\frac{-\beta}{1-(\alpha+\beta)} MP^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}} w_1^{\frac{-\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} w_2^{\frac{\alpha-1}{1-(\alpha+\beta)}}$$

$$x_2(P,w) = \frac{\beta}{1-(\alpha+\beta)} MP^{\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}} w_1^{\frac{-\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} w_2^{\frac{\alpha-1}{1-(\alpha+\beta)}}$$

Función de oferta

$$Y(P,w) = \frac{\partial \pi(P,w)}{\partial P}$$

$$Y(P,w) = \frac{1}{1-(\alpha+\beta)} M P^{\frac{\alpha+\beta}{1-(\alpha+\beta)}} w_1^{\frac{-\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} w_2^{\frac{-\beta}{1-(\alpha+\beta)}}$$

e) La elasticidad sustitución:

$$\sigma = \frac{\partial(x_2/x_1)}{\partial(w_1/w_2)} \frac{w_1/w_2}{x_2/x_1} \qquad \ldots\ldots \text{ (I)}$$

Del problema de minimización de costos:

Min. $w_1x_1 + w_2x_2$

s.a: $Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta} = Y$

$L = w_1X_1 + w_2X_2 + \lambda(y - AX_1^{\alpha} X_2^{\beta})$

Las C.P.O.:

$dL/dX_1 = w_1 - \alpha\lambda AX_1^{\alpha-1}X_2^{\beta} = 0$ .....(1)

$dL/dX_2 = w_2 - \beta\lambda AX_1^{\alpha}X_2^{\beta-1} = 0$ ....(2)

$dL/d\lambda = Y - AX_1^{\alpha}X_2^{\beta} = 0$ .... (3)

Estableciendo la relación (1)/(2), y ordenando:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\alpha\lambda Ax_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}}{\beta\lambda Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\beta w_1}{\alpha w_2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ (4)}$$

Entonces,

$$\frac{\partial\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\partial\left(\frac{w_1}{w_2}\right)} = \frac{\beta}{\alpha} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ (5)}$$

Reemplazando (4) y (5) en (I), y simplificando :

$$\sigma = \frac{\beta}{\alpha}\frac{w_1/w_2}{\beta w_1/\alpha w_2}$$

$$\sigma = 1$$

3. Asuma la siguiente función de costos:

$$C(w,Y) = Aw_1^{\alpha} w_2^{1-\alpha} Y$$

a) Halle las demandas condicionales de cada factor.
b) Determine la función de producción.
c) ¿Cómo será la función de costos en el corto plazo?
d) Calcule la elasticidad sustitución.

Solución

a) Demandas condicionales

Se hallan a través del Lema de Sheppard

$$x_1(w,Y) = \frac{\partial C(w,Y)}{\partial w_1}$$

$$= \alpha A w_1^{\alpha-1} w_2^{1-\alpha} Y$$

$$x_1(w,Y) = \alpha A\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{1-\alpha} Y \qquad \ldots (1)$$

$$x_2(w,Y) = \frac{\partial C(w,Y)}{\partial w_2}$$

$$= (1-\alpha) A\, w_1^{\alpha}\, w_2^{1-\alpha-1} Y$$

$$x_2(w,Y) = (1-\alpha) A \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\alpha} Y \quad \ldots.(2)$$

b) Función de producción

En cada una de las demandas condicionales se despeja la relación (w_1/w_2), luego se igualan:

$$En\ (1) \Rightarrow \left(\frac{w_1}{w_2}\right) = \left(\frac{\alpha AY}{x_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$En\ (2) \Rightarrow \left(\frac{w_1}{w_2}\right) = \left(\frac{x_2}{(1-\alpha)AY}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Entonces,

$$(1) = (2) \Rightarrow \left(\frac{\alpha AY_1}{x_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{x_2}{(1-\alpha)AY}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \ldots..(3)$$

En (3), para facilitar el manejo de los exponentes, hay que evitar las fracciones; por tanto, se debe buscar un factor que simplifique los exponentes:

Elevando ambos miembros a la potencia: α(1-α) y simplificando:

$$\left[\left(\frac{\alpha AY_1}{x_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]^{\alpha(1-\alpha)} = \left[\left(\frac{x_2}{(1-\alpha)AY}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha(1-\alpha)}$$

$$\left(\frac{\alpha AY_1}{x_1}\right)^{\alpha} = \left(\frac{x_2}{(1-\alpha)AY}\right)^{(1-\alpha)}$$

Despejando Y:

$$Y^{\alpha}Y^{(1-\alpha)} = x_1^{\alpha}\left(\frac{x_2}{(1-\alpha)A}\right)^{(1-\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha A}\right)^{\alpha}$$

$$Y = \frac{(1-\alpha)^{(\alpha-1)}}{A\alpha^{\alpha}} x_1^{\alpha} x_2^{(1-\alpha)}$$

c) Para la **función de costos en el corto plazo**,

Se determina el factor fijo: $X_1 = \overline{X}_1$

Luego, de la función de producción se despeja el factor variable, X_2:

$$x_2^{(1-\alpha)} = \frac{YA\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{(1-\alpha)}}{\overline{x}_1^{\alpha}}$$

$$x_2 = (1-\alpha)\left(\frac{YA\alpha^{\alpha}}{\overline{x}_1^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{(1-\alpha)}}$$

Finalmente, se reemplaza este valor en la ecuación de costos:

$$C = w_1\overline{x_1} + w_2\left[(1-\alpha)\left(\frac{YA\alpha^{\alpha}}{\overline{x}_1^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{(1-\alpha)}}\right]$$

d) **La elasticidad sustitución**

$$\sigma = \frac{\partial(x_2/x_1)}{\partial(w_1/w_2)}\frac{w_1/w_2}{x_2/x_1} \qquad \ldots\ldots \text{ (I)}$$

Del problema de minimización de costos:

$$\text{Min.} \quad w_1 x_1 + w_2 x_2$$

$$s.a. \quad \frac{(1-\alpha)^{(\alpha-1)}}{A\alpha^{\alpha}} x_1^{\alpha} x_2^{(1-\alpha)} = Y$$

$$\ell = \quad w_1 x_1 + w_2 x_2 . + \lambda\left(Y - \frac{(1-\alpha)^{(\alpha-1)}}{A\alpha^{\alpha}} x_1^{\alpha} x_2^{(1-\alpha)} \right)$$

C.P.O.

$$\frac{\partial \ell}{\partial x_1} = w_1 - \alpha\lambda \frac{(1-\alpha)^{(\alpha-1)}}{A\alpha^{\alpha}} x_1^{\alpha-1} x_2^{(1-\alpha)} = 0 \quad ....(1)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial x_2} = w_2 - (1-\alpha)\lambda \frac{(1-\alpha)^{(\alpha-1)}}{A\alpha^{\alpha}} x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha)} = 0 \quad ....(2)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = \quad Y - \frac{(1-\alpha)^{(\alpha-1)}}{A\alpha^{\alpha}} x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha)} = 0 \quad ....(3)$$

Estableciendo la relación (1)/(2), y ordenando:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\alpha\lambda \frac{(1-\alpha)^{(\alpha-1)}}{A\alpha^{\alpha}} x_1^{\alpha-1} x_2^{(1-\alpha)}}{(1-\alpha)\lambda \frac{(1-\alpha)^{(\alpha-1)}}{A\alpha^{\alpha}} x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha}}$$

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\alpha \quad x_2}{(1-\alpha) \; x_1}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{(1-\alpha) \; w_1}{\alpha \quad w_2} \quad .... \quad (4)$$

Entonces,

$$\frac{\partial\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\partial\left(\frac{w_1}{w_2}\right)} = \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \quad .... \quad (5)$$

Reemplazando (4) y (5) en (I), y simplificando :

$$\sigma = \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \frac{w_1/w_2}{(1-\alpha)w_1/\alpha w_2}$$

$$\sigma = 1$$

4. Dada la siguiente función de producción:

$$f(x_1,x_2) = 4(x_1^{0,75} + x_2^{0,75})$$

a) Obtenga las demandas no condicionales y la función de oferta.
b) Determine la función de beneficios.
c) Compruebe el Teorema de Hotelling.
d) Obtenga la función de costos.
e) Compruebe el Lema de Sheppard

Solución

a) Las Demandas no condicionales (DNC) y la Función de oferta

Partimos de la ecuación de beneficios, realizando los reemplazos respectivos:

$$\pi = P.Y - C$$

$$\pi = P.[4(x_1^{0,75} + x_2^{0,75})] - w_1x_1 - w_2x_2 \quad ....(\alpha)$$

Luego, aplicando derivadas parciales, y despejando, obtenemos las DNC:

$$d\pi/dx_1 = 3Px_1^{-0,25} - w_1 = 0$$

$$x_1^{-0,25} = \frac{w_1}{3P}$$

$$x_1(P,w) = \left(\frac{3P}{w_1}\right)^4$$

$d\pi/dx_2 = 3Px_2^{-0,25} - w_2 = 0$

$$x_2^{-0,25} = \frac{w_2}{3P}$$

$$x_2(P, w) = \left(\frac{3P}{w_2}\right)^4$$

La función de oferta se obtiene reemplazando, en la función de producción, las DNC:

$$Y(P, w) = 4\left\{\left[\left(\frac{3P}{w_1}\right)^4\right]^{0.75} + \left[\left(\frac{3P}{w_2}\right)^4\right]^{0.75}\right\}$$

$$Y(P, w) = 4\left[\left(\frac{3P}{w_1}\right)^3 + \left(\frac{3P}{w_2}\right)^3\right]$$

$$Y(P, w) = 108\ P^3\left[\left(\frac{1}{w_1}\right)^3 + \left(\frac{1}{w_2}\right)^3\right]$$

b) La función de beneficios:

Se obtiene reemplazando, en la ecuación de beneficios, las DNC y la función de oferta:

$$\pi(P, w) = P\left\{108\ P^3\left[\left(\frac{1}{w_1}\right)^3 + \left(\frac{1}{w_2}\right)^3\right]\right\} - w_1\left(\frac{3P}{w_1}\right)^4 - w_2\left(\frac{3P}{w_2}\right)^4$$

$$\pi(P, w) = 108\ P^4\left[\left(\frac{1}{w_1}\right)^3 + \left(\frac{1}{w_2}\right)^3\right] - 81P^4\left(\frac{1}{w_1}\right)^3 - 81P^4\left(\frac{1}{w_2}\right)^3$$

$$\pi(P,w) = \quad 108\,P^4\left[\left(\frac{1}{w_1}\right)^3 + \left(\frac{1}{w_2}\right)^3\right] - 81P^4\left[\left(\frac{1}{w_1}\right)^3 + \left(\frac{1}{w_2}\right)^3\right]$$

$$\pi(P,w) = \quad 27\,P^4\left[\left(\frac{1}{w_1}\right)^3 + \left(\frac{1}{w_2}\right)^3\right]$$

c) Comprobación de las Demandas no condicionales y función de oferta

Teorema de Hotelling:

Demandas Condicionales: Función de Oferta

$$x_i(P,w) = \quad -\frac{\partial\pi(P,w)}{\partial w_i} \qquad\qquad Y(P,w) = \frac{\partial\pi(P,w)}{\partial P}$$

$$\Rightarrow \quad x_1(P,w) = \quad -\frac{\partial\pi(P,w)}{\partial w_1} = -(-3)27\,P^4 w_1^{-4}$$

$$= \quad 81\left(\frac{P}{w_1}\right)^4$$

$$x_1(P,w) = \left(\frac{3P}{w_1}\right)^4$$

$$\Rightarrow \quad x_2(P,w) = \quad -\frac{\partial\pi(P,w)}{\partial w_2} = -(-3)27\,P^4 w_2^{-4}$$

$$= \quad 81\left(\frac{P}{w_2}\right)^4$$

$$x_2(P,w) = \left(\frac{3P}{w_2}\right)^4$$

$$\Rightarrow \quad Y(P,w) = \frac{\partial \pi(P,w)}{\partial P} = 27\,(4)\,P^3\left[\left(\frac{1}{w_1}\right)^3 + \left(\frac{1}{w_2}\right)^3\right]$$

$$Y(P,w) = 108\;P^3\left[\left(\frac{1}{w_1}\right)^3 + \left(\frac{1}{w_2}\right)^3\right]$$

d) **Función de costos**

Su hallazgo implica la minimización del costo total:

Min. $w_1X_1 + w_2X_2$

s.a: $4(X_1^{0,75} + X_2^{0,75}) = Y$

$$L = w_1X_1 + w_2X_2 + \lambda(Y - 4(X_1^{0,75} + X_2^{0,75})$$

Aplicando la condición de primer orden:

$dL/dX_1 = w_1 - 3l.X_1^{-0,25} = 0$ .... (1)

$dL/dX_2 = w_2 - 3l\,X_2^{-0,25} = 0$ .... (2)

$dL/d\lambda = Y - 4(X_1^{0,75} + X_2^{0,75}) = 0$ .... (3)

Resolviendo el sistema, de (1) y (2):

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{x_1^{-0,25}}{x_2^{-0,25}} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{0,25}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^4 x_2 \quad .... \quad (4)$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^4 x_1 \quad .... \quad (5)$$

Reemplazando (5) y (4) en la restricción, alternadamente, y haciendo los despejes respectivos, hallamos las demandas condicionales de cada factor

$$\Rightarrow \quad Y = 4\left\{ x_1^{0,75} + \left[\left(\frac{w_1}{w_2} \right)^4 x_1 \right]^{0,75} \right\} = 4\left[x_1^{0,75} + \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^3 x_1^{0,75} \right]$$

$$Y = 4\left\{ x_1^{0,75} \left[1 + \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^3 \right] \right\} = 4\, x_1^{0,75} \left(\frac{w_1^3 + w_2^3}{w_2^3} \right)$$

$$x_1^{0,75} = \frac{Y\, w_2^3}{4(w_1^3 + w_2^3)}$$

$$x_1 = \left[\frac{Y\, w_2^3}{4(w_1^3 + w_2^3)} \right]^{4/3}$$

$$\Rightarrow \quad Y = 4\left\{ \left[\left(\frac{w_2}{w_1} \right)^4 x_2 \right]^{0,75} + x_2^{0,75} \right\} = 4\left[\left(\frac{w_2}{w_1} \right)^3 x_2^{0,75} + x_2^{0,75} \right]$$

$$Y = 4\left\{ x_2^{0,75} \left[\left(\frac{w_2}{w_1} \right)^3 + 1 \right] \right\} = 4\, x_2^{0,75} \left(\frac{w_1^3 + w_2^3}{w_1^3} \right)$$

$$x_2^{0,75} = \frac{Y\, w_1^3}{4(w_1^3 + w_2^3)}$$

$$x_2 = \left[\frac{Y\, w_1^3}{4(w_1^3 + w_2^3)} \right]^{4/3}$$

Reemplazando las demandas condicionales en la ecuación de costos, se obtiene la función de costos:

$$C(w,Y) = w_1\left[\frac{Y\ w_2^3}{4(w_1^3 + w_2^3)}\right]^{4/3} + w_2\left[\frac{Y\ w_1^3}{4(w_1^3 + w_2^3)}\right]^{4/3}$$

$$C(w,Y) = \left[\frac{Y^{4/3} w_1\ w_2^4 + Y^{4/3} w_1^4 w_2}{\left[4(w_1^3 + w_2^3)\right]^{4/3}}\right]$$

$$C(w,Y) = \left[\frac{Y^{4/3} w_1\ w_2^4 + Y^{4/3} w_1^4 w_2}{[4(w_1^3 + w_2^3)]^{4/3}}\right]$$

$$C(w,Y) = \frac{Y^{4/3} w_1\ w_2 (w_1^3 + w_2^3)}{[4(w_1^3 + w_2^3)]^{4/3}}$$

$$C(w,Y) = \frac{Y^{4/3} w_1 w_2}{[256(w_1^3 + w_2^3)]^{1/3}}$$

e) **Comprobación de las Demandas condicionales**

Lema de Sheppard

$$x_i(w,Y) = \frac{\partial C(w,Y)}{\partial w_i}$$

Entonces,

- $x_1(w,Y) = \dfrac{\partial C}{\partial w_1}$

$$x_1 = Y^{\frac{4}{3}} w_2 [256(w_1^3 + w_2^3)]^{-1/3} + (-1/3)[256(w_1^3 + w_2^3)]^{-4/3} 768 w_1^2 (Y^{\frac{4}{3}} w_1 w_2)$$

Reordenando para factorizar:

$$x_1 = Y^{\frac{4}{3}} w_2 [256(w_1^3 + w_2^3)]^{-1/3} - Y^{\frac{4}{3}} w_2 [256(w_1^3 + w_2^3)]^{-1/3} \frac{1}{3} \frac{768\, w_1^3}{[256(w_1^3 + w_2^3)]}$$

Factorizando y simplificando:

$$x_1 = Y^{\frac{4}{3}} w_2 [256(w_1^3 + w_2^3)]^{-1/3} [1 - \frac{w_1^3}{(w_1^3 + w_2^3)}]$$

$$x_1 = Y^{\frac{4}{3}} w_2 [256(w_1^3 + w_2^3)]^{-1/3} [\frac{w_1^3 + w_2^3 - w_1^3}{(w_1^3 + w_2^3)}]$$

$$x_1 = Y^{\frac{4}{3}} w_2 (256)^{-1/3} (w_1^3 + w_2^3)^{-1/3} \frac{w_2^3}{(w_1^3 + w_2^3)}$$

$$x_1 = Y^{\frac{4}{3}} w_2^4 (4^4)^{-1/3} (w_1^3 + w_2^3)]^{-4/3}$$

$$x_1 = Y^{\frac{4}{3}} w_2^4 (4)^{-4/3} (w_1^3 + w_2^3)^{-4/3}$$

$$x_1 = \frac{Y^{\frac{4}{3}} w_2^4}{[4(w_1^3 + w_2^3)]^{4/3}}$$

$$x_1(w,Y) = \left[\frac{Y\ w_2^3}{[4(w_1^3 + w_2^3)]} \right]^{4/3}$$

$$x_2(w,Y) = \frac{\partial C}{\partial w_2}$$

$$= Y^{\frac{4}{3}} w_1 [256(w_1^3 + w_2^3)]^{-1/3} + (-1/3)[256(w_1^3 + w_2^3)]^{-4/3} 768 w_2^2 (Y^{\frac{4}{3}} w_1 w_2)$$

Reordenando para factorizar:

$$x_2 = Y^{\frac{4}{3}} w_1 [256 \ (w_1^3 + w_2^3)]^{-1/3} - Y^{\frac{4}{3}} w_1 [256 \ (w_1^3 + w_2^3)]^{-1/3} \frac{1}{3} \frac{768 \ w_2^3}{[256 \ (w_1^3 + w_2^3)]}$$

Factorizando y simplificando:

$$x_2 = Y^{\frac{4}{3}} w_1 [256(w_1^3 + w_2^3)]^{-1/3} [1 - \frac{w_2^3}{(w_1^3 + w_2^3)}]$$

$$x_2 = Y^{\frac{4}{3}} w_2 [256(w_1^3 + w_2^3)]^{-1/3} [\frac{w_1^3 + w_2^3 - w_2^3}{(w_1^3 + w_2^3)}]$$

$$x_2 = Y^{\frac{4}{3}} w_1 (256)^{-1/3} (w_1^3 + w_2^3)^{-1/3} \frac{w_1^3}{(w_1^3 + w_2^3)}$$

$$x_2 = Y^{\frac{4}{3}} w_1^4 (4)^{-4/3} (w_1^3 + w_2^3)^{-4/3}$$

$$x_2 = \frac{Y^{\frac{4}{3}} w_1^4}{[4(w_1^3 + w_2^3)]^{4/3}}$$

$$x_2(w, Y) = \left[\frac{Y \ w_1^3}{[4(w_1^3 + w_2^3)]} \right]^{4/3}$$

5. Dada la siguiente función de producción:

$f(x_1,x_2) = 3(x_1^{1/3} + x_2^{1/3} + x_3^{1/3})$

a) Obtenga las demandas no condicionales y la función de oferta
b) Determine la función de beneficios
c) Compruebe el Teorema de Hotelling.
d) Obtenga la función de costos
e) Compruebe el Lema de Sheppard

Solución

a) **Las Demandas no condicionales y la función de oferta**

Partimos de la ecuación de beneficios:

$$\pi = P.Y - C$$

Reemplazamos en ésta, la función de producción

$$\pi = P.[\, 3(x_1^{1/3} + x_2^{1/3} + x_3^{1/3})] \; - \; w_1x_1 - w_2x_2 - w_3x_3 ....(a)$$

Aplicamos la condición de primer orden:

$d\pi/dx_1 = \; Px_1^{-2/3} - w_1 = \; 0 \quad .... (1)$

$d\pi/dx_2 = \; Px_2^{-2/3} - w_2 = \; 0 \quad .... (2)$

$d\pi/dx_3 = \; Px_3^{-2/3} - w_3 = \; 0 \quad .... (3)$

de (1) : $\qquad x_1^{-2/3} = \dfrac{w_1}{P}$

$$x_1(P, w) = \left(\frac{P}{w_1}\right)^{3/2}$$

de (2) : $\qquad x_2^{-2/3} = \dfrac{w_2}{P}$

$$x_2(P, w) = \left(\frac{P}{w_2}\right)^{3/2}$$

de (3) : $\qquad x_3^{-2/3} = \dfrac{w_3}{P}$

$$x_3(P, w) = \left(\frac{P}{w_3}\right)^{3/2}$$

La función de oferta

Para obtenerla, se reemplazan las DNC en la función de producción:

$$Y(P,w) = 3\left\{\left[\left(\frac{P}{w_1}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[\left(\frac{P}{w_2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[\left(\frac{P}{w_3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}\right\}$$

$$Y(P,w) = 3\left[\left(\frac{P}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{P}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{P}{w_3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$Y(P,w) = 3P^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{1}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{w_3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

b) **La función de beneficios**

Se reemplaza, en (a), las DNC y la función de oferta, y se reduce:

$$\pi(P,w) = P3P^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{1}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{w_3}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - w_1\left(\frac{P}{w_1}\right)^{\frac{3}{2}} - w_2\left(\frac{P}{w_2}\right)^{\frac{3}{2}} - w_3\left(\frac{P}{w_3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\pi(P,w) = 3P^{\frac{3}{2}}\left[\left(\frac{1}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{w_3}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - P^{\frac{3}{2}}\left[\left(\frac{1}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{w_3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\pi(P,w) = 2P^{\frac{3}{2}}\left[\left(\frac{1}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{w_3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

c) Comprobación de las Demandas no condicionales y la función de oferta

Teorema de Hotelling

Demandas Condicionales: Función de Oferta

$$x_i(P,w) = -\frac{\partial \pi(P,w)}{\partial w_i} \qquad Y(P,w) = \frac{\partial \pi(P,w)}{\partial P}$$

$$\Rightarrow \quad x_1(P,w) = -\frac{\partial \pi(P,w)}{\partial w_1}$$

$$x_1(P,w) = -(-\frac{1}{2})2P^{\frac{3}{2}}w_1^{-\frac{3}{2}}$$

$$x_1(P,w) = \left(\frac{P}{w_1}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad x_2(P,w) = -\frac{\partial \pi(P,w)}{\partial w_2}$$

$$x_2(P,w) = -(-\frac{1}{2})2P^{\frac{3}{2}}w_2^{-\frac{3}{2}}$$

$$x_2(P,w) = \left(\frac{P}{w_2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad x_3(P,w) = -\frac{\partial \pi(P,w)}{\partial w_3}$$

$$x_3(P,w) = -(-\frac{1}{2})2P^{\frac{3}{2}}w_3^{-\frac{3}{2}}$$

$$x_3(P,w) = \left(\frac{P}{w_3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Función de oferta

$$Y(P,w) = \frac{\partial \pi}{\partial P} = 2\left(\frac{3}{2}\right)P^{\frac{3}{2}-1}\left[\left(\frac{1}{w_1}\right)^3 + \left(\frac{1}{w_2}\right)^3 + \left(\frac{1}{w_3}\right)^3\right]$$

$$Y(P,w) = 3P^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{1}{w_1}\right)^3 + \left(\frac{1}{w_2}\right)^3 + \left(\frac{1}{w_3}\right)^3\right]$$

d) **Función de costos**

Se debe minimizar el costo total

Min. $w_1x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3$

s.a: $3(x_1^{1/3} + x_2^{1/3} + x_3^{1/3}) = Y$

$£ = w_1x_1 + w_2 x_2 + w_3x_3 + \lambda(Y - 3(x_1^{1/3} + x_2^{1/3} + x_3^{1/3})$

Aplicando condición de primer orden:

$d£/dx_1 = w_1 - (1/3)l.x_1^{-2/3} = 0$ ...... (1)

$d£/dx_2 = w_2 - (1/3)l\, x_2^{-2/3} = 0$ ...... (2)

$d£/dx_3 = w_3 - (1/3)l\, x_3^{-2/3} = 0$ ...... (3)

$d£/d\lambda = Y - 3(x_1^{1/3} + x_2^{1/3} + x_3^{1/3}) = 0$ ...... (4)

Resolviendo el sistema, de (1) y (2):

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{x_1^{-\frac{2}{3}}}{x_2^{-\frac{2}{3}}} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{3}{2}} x_1 \quad .... \quad (5)$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{\frac{3}{2}} x_2 \quad .... \quad (6)$$

De (1) y (3):

$$\frac{w_1}{w_3} = \frac{x_1^{-\frac{2}{3}}}{x_3^{-\frac{2}{3}}} = \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = \left(\frac{w_1}{w_3}\right)^{\frac{3}{2}} x_1 \quad .... \quad (7)$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \left(\frac{w_3}{w_1}\right)^{\frac{3}{2}} x_3 \quad .... \quad (8)$$

De (2) y (3):

$$\frac{w_2}{w_3} = \frac{x_2^{-\frac{2}{3}}}{x_3^{-\frac{2}{3}}} = \left(\frac{x_3}{x_2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = \left(\frac{w_2}{w_3}\right)^{\frac{3}{2}} x_2 \quad .... \quad (9)$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \left(\frac{w_3}{w_2}\right)^{\frac{3}{2}} x_3 \quad .... \quad (10)$$

Reemplazando las equivalencias, convenientemente, en la restricción, se obtienen las <u>demandas condicionales</u> de cada factor. Así, para obtener X_1, se debe usar (5) y (7), y despejar:

$$Y = 3\left[x_1^{\frac{1}{3}} + \left[\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{3}{2}} x_1\right]^{\frac{1}{3}} + \left[\left(\frac{w_1}{w_3}\right)^{\frac{3}{2}} x_1\right]^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$Y = 3\left[x_1^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}} x_1^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{w_1}{w_3}\right)^{\frac{1}{2}} x_1^{\frac{1}{3}} \right]$$

$$Y = 3 w_1^{\frac{1}{2}} x_1^{\frac{1}{3}} \left[\left(\frac{1}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{w_3}\right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$x_1 = \left(\frac{Y}{3 w_1^{\frac{1}{2}} \left[(1/w_1)^{\frac{1}{2}} + (1/w_2)^{\frac{1}{2}} + (1/w_3)^{\frac{1}{2}} \right]} \right)^3$$

Para obtener X_2, se reemplazan (6) y (9):

$$Y = 3\left[\left[\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{\frac{3}{2}} x_2 \right]^{\frac{1}{3}} + x_2^{\frac{1}{3}} + \left[\left(\frac{w_2}{w_3}\right)^{\frac{3}{2}} x_2 \right]^{\frac{1}{3}} \right]$$

$$Y = 3\left[\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{3}} + x_2^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{w_2}{w_3}\right)^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{3}} \right]$$

$$Y = 3 w_2^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{3}} \left[\left(\frac{1}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{w_3}\right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$x_2 = \left(\frac{Y}{3 w_2^{\frac{1}{2}} \left[(1/w_1)^{\frac{1}{2}} + (1/w_2)^{\frac{1}{2}} + (1/w_3)^{\frac{1}{2}} \right]} \right)^3$$

Luego, para obtener X_3, se reemplazan (8) y (10):

$$Y = 3\left[\left[\left(\frac{w_3}{w_1}\right)^{\frac{3}{2}} x_3\right]^{\frac{1}{3}} + \left[\left(\frac{w_3}{w_2}\right)^{\frac{3}{2}} x_3\right]^{\frac{1}{3}} + x_3^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$Y = 3\left[\left(\frac{w_3}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}} x_3^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{w_3}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}} x_3^{\frac{1}{3}} + x_3^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$Y = 3w_3^{\frac{1}{2}} x_3^{\frac{1}{3}}\left[\left(\frac{1}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{w_3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$x_3 = \left(\frac{Y}{3w_3^{\frac{1}{2}}\left[(1/w_1)^{\frac{1}{2}} + (1/w_2)^{\frac{1}{2}} + (1/w_3)^{\frac{1}{2}}\right]}\right)^3$$

Remplazando las demandas condicionales en la ecuación de costos[9], se obtiene la función de costos:

$$C(w,Y) = w_1\left[\frac{Y}{3w_1^{\frac{1}{2}}A}\right]^3 + w_2\left[\frac{Y}{3w_2^{\frac{1}{2}}A}\right]^3 + w_3\left[\frac{Y}{3w_3^{\frac{1}{2}}A}\right]^3$$

$$C(w,Y) = \left(\frac{1}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{Y}{3A}\right]^3 + \left(\frac{1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{Y}{3A}\right]^3 + \left(\frac{1}{w_3}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{Y}{3A}\right]^3$$

[9] Se asume que A= $\left[(1/W_1)^{1/2} + (1/W_2)^{1/2} + (1/W_3)^{1/2}\right]$

$$C(w,Y)=\left(\frac{Y}{3A}\right)^{3}\left[\left(\frac{1}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{w_3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$C(w,Y)=\frac{Y^{3}}{27A^{3}}A$$

Remplazando A:

$$C(w,Y)=\frac{Y^{3}}{27\left[(1/w_1)^{\frac{1}{2}}+(1/w_2)^{\frac{1}{2}}+(1/w_3)^{\frac{1}{2}}\right]^{2}}$$

e) Comprobación de las demandas condicionales

Lema de Sheppard:

$$x_i(w,Y)=\frac{\partial C(w,Y)}{\partial w_i}$$

Entonces,

$$x_1(w,Y)=\frac{\partial C}{\partial w_1}=(-2)\frac{Y^{3}}{27}\left[\left(\frac{1}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{w_3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-3}\left(-\frac{1}{2}\right)(w_1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{Y^{3}}{27}\left[\left(\frac{1}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{w_3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-3}\left(\frac{1}{w_1}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$x_1(w,Y) = \left[\frac{Y}{3w_1^{\frac{1}{2}}\left[(1/w_1)^{\frac{1}{2}} + (1/w_1)^{\frac{1}{2}} + (1/w_1)^{\frac{1}{2}}\right]}\right]^3$$

$$x_2(w,Y) = \frac{\partial C}{\partial w_2} = (-2)\frac{Y^3}{27}\left[\left(\frac{1}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{w_3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-3}\left(-\frac{1}{2}\right)(w_2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{Y^3}{27}\left[\left(\frac{1}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{w_3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-3}\left(\frac{1}{w_2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$x_2(w,Y) = \left[\frac{Y}{3w_2^{\frac{1}{2}}\left[(1/w_1)^{\frac{1}{2}} + (1/w_1)^{\frac{1}{2}} + (1/w_1)^{\frac{1}{2}}\right]}\right]^3$$

$$x_3(w,Y) = \frac{\partial C}{\partial w_3} = (-2)\frac{Y^3}{27}\left[\left(\frac{1}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{w_3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-3}\left(-\frac{1}{2}\right)(w_3)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{Y^3}{27}\left[\left(\frac{1}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{w_3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-3}\left(\frac{1}{w_3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$x_3(w,Y) = \left[\frac{Y}{3w_3^{\frac{1}{2}}\left[(1/w_1)^{\frac{1}{2}} + (1/w_1)^{\frac{1}{2}} + (1/w_1)^{\frac{1}{2}}\right]}\right]^3$$

6. Dada la siguiente función de producción:

$$Y(x_1, x_2) = 2\left[x_1^{-1} + x_2^{-1}\right]^{-1}$$

a) Calcule la función de costos.
b) Halle la función de costos a corto plazo para esta tecnología.
c) Halle la elasticidad de sustitución

Solución:

a) Función de Costos

Su cálculo implica minimizar el costo:

$$\text{Min.} \quad w_1 x_1 + w_2 x_2$$

$$s.a.: \; 2\left[x_1^{-1} + x_2^{-1}\right]^{-1} = Y$$

$$\ell = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \lambda\left\{Y - 2\left[x_1^{-1} + x_2^{-1}\right]^{-1}\right\}$$

C.P.O.:

$$\partial\ell / \partial x_1 = w_1 + 2\lambda x_1^{-2} = 0 \quad \ldots\ldots \; (1)$$

$$\partial\ell / \partial x_2 = w_2 + 2\lambda x_2^{-2} = 0 \quad \ldots\ldots \; (2)$$

$$\partial\ell / \partial\lambda = y - 2\left[x_1^{-1} + x_2^{-1}\right]^{-1} = 0 \quad \ldots\ldots \; (3)$$

Resolviendo el sistema, se obtiene la relación entre x_1 y x_2:

$$\Rightarrow \quad \frac{w_2}{w_1} = \frac{2\lambda x_2^{-2}}{2\lambda x_1^{-2}}$$

$$x_2 = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}} x_1 \quad \ldots..(4) \qquad\qquad x_1 = \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}} x_2 \quad \ldots..(5)$$

Haciendo los reemplazos respectivos en la restricción, se hallan las demandas condicionales de cada factor. Así, al reemplazar (4), se obtiene la demanda condicional del factor x_1:

$$Y = 2\left\{ x_1^{-1} + \left[\left(\frac{w_1}{w_2} \right)^{\frac{1}{2}} x_1 \right]^{-1} \right\}^{-1}$$

$$Y = 2\left[x_1^{-1} + \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^{-\frac{1}{2}} x_1^{-1} \right]^{-1}$$

$$Y = 2\left[x_1^{-1} + \left(\frac{w_2}{w_1} \right)^{\frac{1}{2}} x_1^{-1} \right]^{-1}$$

$$Y = 2\left[x_1^{-1} \left(\frac{w_1^{\frac{1}{2}} + w_2^{\frac{1}{2}}}{w_1^{\frac{1}{2}}} \right) \right]^{-1}$$

$$Y = 2\left(\frac{x_1 w_1^{\frac{1}{2}}}{w_1^{\frac{1}{2}} + w_2^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$x_1 = \frac{Y}{2}\left(\frac{w_1^{\frac{1}{2}} + w_2^{\frac{1}{2}}}{w_1^{\frac{1}{2}}} \right)$$

Para obtener la demanda condicional del factor x_2, se reemplaza (5), en la función de producción:

$$Y = 2\left\{ \left[\left(\frac{w_2}{w_1} \right)^{\frac{1}{2}} x_2 \right]^{-1} + x_2^{-1} \right\}^{-1}$$

$$Y = 2\left[\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{-\frac{1}{2}} x_2^{-1} + x_2^{-1}\right]^{-1}$$

$$Y = 2\left[\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}} x_2^{-1} + x_2^{-1}\right]^{-1}$$

$$Y = 2\left[x_2^{-1}\left(\frac{w_1^{\frac{1}{2}} + w_2^{\frac{1}{2}}}{w_2^{\frac{1}{2}}}\right)\right]^{-1}$$

$$Y = 2\left(\frac{x_1\, w_2^{\frac{1}{2}}}{w_1^{\frac{1}{2}} + w_2^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$x_2 = \frac{Y}{2}\left(\frac{w_1^{\frac{1}{2}} + w_2^{\frac{1}{2}}}{w_2^{\frac{1}{2}}}\right)$$

Finalmente, reemplazando las demandas condicionales, en la ecuación de costos, y reduciendo, se obtiene la función de costos:

$$C(w,Y) = w_1 . \frac{Y}{2}\left(\frac{w_1^{\frac{1}{2}} + w_2^{\frac{1}{2}}}{w_1^{\frac{1}{2}}}\right) + w_2 . \frac{Y}{2}\left(\frac{w_1^{\frac{1}{2}} + w_2^{\frac{1}{2}}}{w_2^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$C(w,Y) = \frac{Y}{2}\left(w_1^{\frac{1}{2}} + w_2^{\frac{1}{2}}\right)\left(w_1^{\frac{1}{2}} + w_2^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$C(w,Y) = \frac{Y}{2}\left(w_1^{\frac{1}{2}} + w_2^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

b) Función de costos a corto plazo

Se asume que uno de los factores permanece fijo, por ejemplo $x_1 = \bar{x}_1$; luego, se reemplaza en la función de producción, y se despeja el factor variable:

$$Y = 2\left[\bar{x}_1^{-1} + x_2^{-1}\right]^{-1}$$

$$\left[\bar{x}_1^{-1} + x_2^{-1}\right]^{-1} = \frac{Y}{2}$$

$$\left[\bar{x}_1^{-1} + x_2^{-1}\right] = \frac{2}{Y}$$

$$x_2^{-1} = \frac{2}{Y} - \bar{x}_1^{-1}$$

$$x_2^{-1} = \frac{2}{Y} - \frac{1}{\bar{x}_1} = \frac{2\bar{x}_1 - Y}{Y\bar{x}_1}$$

$$x_2 = \frac{Y\bar{x}_1}{2\bar{x}_1 - Y}$$

Luego, se reemplaza en la ecuación de costos, el factor fijo y el factor variable, obteniéndose:

$$C(w,Y)_{CP} = w_1\bar{x}_1 + w_2\left(\frac{Y\bar{x}_1}{2\bar{x}_1 - Y}\right)$$

c) La elasticidad sustitución

$$\sigma = \frac{\partial(x_2/x_1)}{\partial(w_1/w_2)}\,\frac{w_1/w_2}{x_2/x_1} \qquad \text{……….. (1)}$$

Del problema de minimización de costos, rescatamos la relación:

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{x_2^{-2}}{x_1^{-2}}$$

Reordenando:

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{x_1^{2}}{x_2^{2}}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{..........} \quad (2)$$

Entonces,

$$\frac{\partial(x_2/x_1)}{\partial(w_1/w_2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{..........} \quad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) :

$$\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{w_1/w_2}{\frac{1}{2}\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sigma = \frac{1}{2\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{w_1/w_2}{\frac{1}{2}\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

σ = 1

7. Dada la siguiente función de beneficios:

$$\pi(P,w) = p^2\left[\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}\right]$$

Obtenga:

a) Las funciones de Demanda No condicional de los factores.
b) La función de Oferta.
c) Las funciones de Demanda condicional de los factores.
d) La función de Costos.
e) La función de Producción.

Solución

a) Demandas No condicionales

Aplicando el Teorema de Hotelling:

$$x_i(p,w) = -\frac{\partial \pi}{\partial x_i}$$

$$\rightarrow \quad x_1(p,w) = -(-1)\,2p^2 w_1^{-2} = 2\left(\frac{p}{w_1}\right)^2$$

$$\rightarrow \quad x_2(p,w) = -(-1)\,2p^2 w_2^{-2} = 2\left(\frac{p}{w_2}\right)^2$$

b) La función de oferta Y(w, P)

Por Teorema de Hotelling:

$$Y(w,P) = \frac{\partial \pi}{\partial P}$$

$$Y(w,P) = 2p\left[\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}\right]$$

c) Las funciones de demanda condicional

Primero, de la función de oferta se despeja P, así:

$$P = \frac{Y}{2\left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}\right)}$$

Luego, se reemplaza P en cada una de las demandas no condicionales y se reduce:

$$\rightarrow \qquad x_1 = 2\left(\frac{\frac{Y}{2\left(\frac{1}{w_1}+\frac{1}{w_2}\right)}}{w_1}\right)^2 = 2\left(\frac{Y}{2w_1\left(\frac{1}{w_1}+\frac{1}{w_2}\right)}\right)^2$$

$$x_1 = 2\left(\frac{Y}{2w_1\left(\frac{w_1+w_2}{w_1w_2}\right)}\right)^2 = 2\left[\frac{w_2Y}{2(w_1+w_2)}\right]^2$$

$$\boxed{x_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{w_2Y}{(w_1+w_2)}\right]^2}$$

$$\rightarrow \quad x_2 = 2\left(\frac{\dfrac{Y}{2\left(\dfrac{1}{w_1}+\dfrac{1}{w_2}\right)}}{w_2}\right)^2 = 2\left(\frac{Y}{2\,w_2\left(\dfrac{1}{w_1}+\dfrac{1}{w_2}\right)}\right)^2$$

$$x_2 = 2\left(\frac{Y}{2w_2\left(\dfrac{w_1+w_2}{w_1w_2}\right)}\right)^2 = 2\left[\frac{w_1Y}{2(w_1+w_2)}\right]^2$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{w_1Y}{(w_1+w_2)}\right]^2$$

d) La Función de costos

Basta reemplazar las demandas condicionales en la ecuación de costos, y reducir:

$$C(w,Y) = w_1 \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{w_2Y}{(w_1+w_2)}\right]^2 + w_2 \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{w_1Y}{(w_1+w_2)}\right]^2$$

$$C(w,Y) = \frac{Y^2 w_1 w_2^2}{2(w_1+w_2)^2} + \frac{Y^2 w_1^2 w_2}{2(w_1+w_2)^2}$$

$$C(w,Y) = \frac{Y^2 w_1 w_2\,(w_1+w_2)}{2(w_1+w_2)^2}$$

$$C(w,Y) = \frac{Y^2 w_1 w_2}{2(w_1 + w_2)}$$

e) La elasticidad sustitución

$$\sigma = \frac{\partial(x_2/x_1)}{\partial(w_1/w_2)} \frac{w_1/w_2}{x_2/x_1} \qquad \text{.......... (1)}$$

Del problema de minimización de costos:

Min. $w_1X_1 + w_2 X_2$
s.a: $AX_1^a X_2^b = y$

$L = w_1X_1 + w_2 X_2 + \lambda (y - AX_1^a X_2^b)$

CPO:

$dL/dX_1 = w_1 - a \lambda AX_1^{a-1}X_2^b = 0$

$dL/dX_2 = w_2 - b \lambda AX_1^a X_2^{b-1} = 0$

$dL/d\lambda = y - AX_1^a X_2^b = 0$

Estableciendo la relación:

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{a\lambda A x_1^{a-1} x_2^b}{b\lambda A x_1^a x_2^{b-1}}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{bw_1}{aw_2} \qquad \text{.......... (2)}$$

Entonces, $$\frac{\partial(x_2/x_1)}{\partial(w_1/w_2)} = \frac{b}{a} \quad \text{..........} \quad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) :

$$\sigma = \frac{b}{a}\frac{w_1/w_2}{bw_1/aw_2}$$

σ = 1

8. Dada la siguiente función de producción de una empresa:

$$Y = (x_1 - 2)^{\frac{1}{2}} + (x_2 - 4)^{\frac{1}{2}}$$

a) Halle el nivel de producción y las cantidades óptimas empleadas de cada factor cuando $w_1 = w_2 = 10$ y el Costo total es igual a 5'000.060
b) La empresa requiere producir 200 unidades de su producto cuando el precio del factor x_2 es el doble del de x_1. Halle el costo total de producción.

Solución

a) Estos cálculos implican minimizar el costo:

$$\text{Min.} \quad w_1x_1 + w_2x_2$$

$$s.a : (x_1 - 2)^{\frac{1}{2}} + (x_2 - 4)^{\frac{1}{2}} = Y$$

$$\ell = w_1x_1 + w_2x_2 + \lambda\left\{Y - \left[(x_1 - 2)^{\frac{1}{2}} + (x_2 - 4)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}$$

C.P.O.:

$$\partial\ell/\partial x_1 = w_1 - \frac{1}{2}\lambda(x_1 - 2)^{-\frac{1}{2}}(1) = 0 \quad \text{......} \quad (1)$$

$$\partial \ell / \partial x_2 = w_2 - \frac{1}{2}\lambda (x_2 - 4)^{-\frac{1}{2}} (1) = 0 \quad ..... (2)$$

$$\partial \ell / \partial \lambda = Y - \left[(x_1 - 2)^{\frac{1}{2}} + (x_2 - 4)^{\frac{1}{2}} \right] = 0 \quad .....(3)$$

Resolviendo el sistema, se divide (1)/(2), y se simplifica, obteniéndose la relación entre x_1 y x_2:

$$\frac{\frac{1}{2}\lambda (x_1 - 2)^{-\frac{1}{2}} (1)}{\frac{1}{2}\lambda (x_2 - 4)^{-\frac{1}{2}} (1)} = \frac{w_1}{w_2}$$

$$\left[\frac{(x_2 - 4)}{(x_1 - 2)} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{w_1}{w_2}$$

$$\frac{(x_2 - 4)}{(x_1 - 2)} = \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 (x_1 - 2) + 4 \quad ... (4)$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \left(\frac{w_2}{w_1} \right)^2 (x_2 - 4) + 2 \quad ... (5)$$

Haciendo los remplazos respectivos en la restricción, se hallan las demandas condicionales de cada factor. Así, al remplazar (4), y simplificar se obtiene la demanda condicional del factor x_1:

$$(x_1 - 2)^{\frac{1}{2}} + \left[\left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 (x_1 - 2) + 4 - 4 \right]^{\frac{1}{2}} = Y$$

$$(x_1-2)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{2}{2}}(x_1-2)^{\frac{1}{2}}=Y$$

$$(x_1-2)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{w_1}{w_2}\right)=Y$$

$$(x_1-2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{w_1+w_2}{w_2}\right)=Y$$

$$(x_1-2)=\left(\frac{w_2}{w_1+w_2}Y\right)^2$$

$$x_1=\left(\frac{w_2}{w_1+w_2}Y\right)^2+2$$

Para obtener la otra demanda condicional se reemplaza (5) en (3):

$$\left[\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^2(x_2-4)+2-2\right]^{\frac{1}{2}}+(x_2-4)^{\frac{1}{2}}=Y$$

$$\left[\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^2(x_2-4)\right]^{\frac{1}{2}}+(x_2-4)^{\frac{1}{2}}=Y$$

$$\left[\left(\frac{w_2}{w_1}\right)(x_2-4)^{\frac{1}{2}}\right]+(x_2-4)^{\frac{1}{2}}=Y$$

$$(x_2-4)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{w_2}{w_1}\right)=Y$$

$$(x_2-4)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{w_1+w_2}{w_1}\right)=Y$$

$$(x_2 - 4) = \left(\frac{w_1}{w_1 + w_2} Y\right)^2$$

$$x_2 = \left(\frac{w_1}{w_1 + w_2} Y\right)^2 + 4$$

Para obtener la función de costos se reemplaza $x_1(w,Y)$ y $x_2(w,Y)$ en la ecuación de costos, y se simplifica:

$$C(w,Y) = w_1 \cdot \left[\left(\frac{w_2}{w_1 + w_2} Y\right)^2 + 2\right] + w_2 \cdot \left[\left(\frac{w_1}{w_1 + w_2} Y\right)^2 + 4\right]$$

$$C(w,Y) = \frac{w_1 w_2^{\,2}}{(w_1 + w_2)^2} + \frac{w_1^{\,2} w_2}{(w_1 + w_2)^2} + 2w_2 + 4w_2$$

$$C(w,Y) = \frac{w_1 w_2 Y^2}{(w_1 + w_2)^2}(w_1 + w_2) + 2w_1 + 4w_2$$

$$C(w,Y) = \frac{w_1 w_2 Y^2}{(w_1 + w_2)} + 2w_1 + 4w_2$$

Entonces, si C = 5’000.060, $w_1 = w_2 = 10$, el nivel de producción será:

$$5'000.060 = \frac{(10)(10)Y^2}{(10 + 10)} + 2(10) + 4(10)$$

$$5'000.060 = \frac{100\,Y^2}{20} + 60$$

$$Y^2 = \frac{5'000.000}{5}$$

$$Y = 1.000$$

Las demandas óptimas de factores:

$$x_1 = \left(\frac{10}{20}(1.000)\right)^2 + 2$$

$$= 250.002$$

$$x_2 = \left(\frac{10}{20}(1.000)\right)^2 + 4$$

$$= 250.004$$

b) Si Y = 600 unidades cuando el precio del factor x_2 es el doble del de x_1

Primero se determina las cantidades demandadas de cada factor:

Si $w_2 = 2w_1$ e $Y = 600$, entonces

$$\Longrightarrow \quad x_1 = \left(\frac{2w_1}{w_1 + 2w_1}(600)\right)^2 + 2$$

$$x_1 = \left(\frac{2}{3}(600)\right)^2 + 2$$

$$x_1 = (400)^2 + 2$$

$$x_1 = 160.002$$

$$\Longrightarrow \quad x_2 = \left(\frac{w_1}{3w_1}(600)\right)^2 + 4$$

$$x_2 = (200)^2 + 4$$

$$x_2 = 40.004$$

9. Si una empresa tiene la siguiente función de producción:

$$Y = [4X_2(X_1+2)]^{1/3}$$

y los costos de los factores son $w_1 = w_2 = 1$

a) Halle la curva de oferta de largo plazo
b) Si el factor X_2 se mantiene fijo en $X_2 = 10$ derive la curva de oferta a corto plazo

Solución

Se plantea el problema dual:

$$\text{Min.} \quad w_1x_1 + w_2x_2$$

$$s.a.: \ [4x_2\ (x_1+2)]^{\frac{1}{3}} = Y$$

$$\ell = w_1x_1 + w_2x_2 + \lambda\left\{Y - [4x_2\ (x_1+2)]^{\frac{1}{3}}\right\}$$

C.P.O.:

$$\partial\ell/\partial x_1 = w_1 - \frac{1}{3}\lambda[4x_2\ (x_1+2)]^{-\frac{2}{3}}(4x_2) = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\partial\ell/\partial x_2 = w_2 - \frac{1}{3}\lambda[4x_2\ (x_1+2)]^{-\frac{2}{3}}(4x_1+8) = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\partial\ell/\partial\lambda = Y - [4x_2\ (x_1+2)]^{\frac{1}{3}} = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

Resolviendo el sistema, se divide (1)/(2), y se simplifica, obteniéndose la relación entre x_1 y x_2:

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{1}{3}\lambda[4x_2\ (x_1+2)]^{-\frac{2}{3}}(4x_2)}{\frac{1}{3}\lambda[4x_2\ (x_1+2)]^{-\frac{2}{3}}(4x_1+8)} = \frac{w_1}{w_2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_2}{(x_1+2)} = \frac{w_1}{w_2}$$

$$x_2 = \frac{w_1(x_1+2)}{w_2} \qquad \text{..... (4)}$$

$$x_1 = \frac{w_2 x_2 - 2w_1}{w_1} \qquad \text{..... (5)}$$

Haciendo los reemplazos respectivos en la restricción, se hallan las demandas condicionales de cada factor. Así, al remplazar (4), se obtiene la demanda condicional del factor x_1:

$$\left[\left(4\frac{w_1(x_1+2)}{w_2}\right)(x_1+2)\right]^{\frac{1}{3}} = Y$$

$$\frac{4w_1(x_1+2)^2}{w_2} = Y^3$$

$$(x_1+2)^2 = \frac{w_2 Y^3}{4w_1}$$

$$(x_1+2) = \left(\frac{w_2 Y^3}{4w_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_1 = \left(\frac{w_2 Y^3}{4w_1}\right)^{\frac{1}{2}} - 2$$

Para obtener la otra demanda condicional se reemplaza (5) en (3):

$$\left[4x_2\left[\left(\frac{w_2 x_2 - 2w_1}{w_1}\right)+2\right]\right]^{\frac{1}{3}} = Y$$

$$\left[4x_2\left(\frac{w_2 x_2 - 2w_1 + 2w_1}{w_1}\right)\right] = Y^3$$

$$4\frac{w_2 x_2{}^2}{w_1} = Y^3$$

$$x_2{}^2 = \frac{w_1 Y^3}{4w_2}$$

$$x_2 = \left(\frac{w_1 Y^3}{4w_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Para obtener la función de costos se reemplaza $x_1(w,Y)$ y $x_2(w,Y)$ en la ecuación de costos, y se simplifica:

$$C(w,Y) = w_1 \cdot \left[\left(\frac{w_2 Y^3}{4w_1}\right)^{\frac{1}{2}} - 2\right] + w_2 \cdot \left[\left(\frac{w_1 Y^3}{4w_2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$C(w,Y) = \left[\left(\frac{w_1 w_2 Y^3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - 2w_1\right] + \left[\left(\frac{w_1 w_2 Y^3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$C(w,Y) = 2\left(\frac{w_1 w_2 Y^3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - 2w_1$$

$$C(w,Y) = \left(w_1 w_2 Y^3\right)^{\frac{1}{2}} - 2w_1$$

Entonces, en función de los datos:

$$C(w,Y) = \left((1)(1)Y^3\right)^{\frac{1}{2}} - 2(1)$$

$$C(w,Y) = Y^{\frac{3}{2}} - 2$$

Luego, como Cmg ≡Oferta, se halla el Cmg:

$$Cmg = \frac{3}{2}Y^{\frac{1}{2}}$$

que representa la oferta de largo plazo.

b) La curva de oferta de corto plazo

Se sabe que el factor fijo es x_2 =10. Entonces, el factor variable se obtiene remplazando X_2 en la función de producción, y despejando:

$$Y = \left[4(10)(x_1 + 2)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$\left[40(x_1 + 2)\right] = Y^3$$

$$(x_1 + 2) = \frac{Y^3}{40}$$

$$x_1 = \frac{Y^3}{40} - 2$$

Luego, en la función de costos:

C = CF + CV

$$C(w,Y) = (1)(10) + (1)\left[\frac{Y^3}{40} - 2\right]$$

$$C(w,Y) = 8 + \frac{Y^3}{40}$$

Similarmente, como oferta ≡ Cmg:

$$Cmg_{CP} = 3\frac{Y^2}{40}$$

10. Dada la siguiente función de producción:

$$\mathbf{Y = e^{(1 + 1/5\,Ln\,X_1 + 4/5\,LnX_2)}}$$

a) Calcule la función de costos.
b) Halle las cantidades demandadas de factores y el costo de producción para 10,000 unidades de producto final cuando los costos de los factores son $w_1 = 1$ y $w_2 = 2$.
c) Calcule la nueva producción cuando se incrementa en 30 % el uso del factor X_1
d) Calcule la nueva producción cuando se incrementa en 20 % el uso del factor X_2

Solución

a) Primero se sintetiza la funciòn:

$$LnY = Lne^{(1 + 1/5Ln\,X_1 + 4/5Ln\,X_2)}$$

$$Ln\,Y = 1 + 1/5Ln\,X_1 + 4/5Ln\,X_2$$

$$Ln\,Y = Ln\,e + 1/5Ln\,X_1 + 4/5Ln\,X_2$$

$$Ln\,Y = Ln\,e + Ln\,X_1^{1/5} + Ln\,X_2^{4/5}$$

$$Ln\,Y = Ln\,(e\,X_1^{1/5}X_2^{4/5})$$

Entonces,

$$Y = e\,X_1^{1/5}X_2^{4/5}$$

Luego:

$$\text{Min.}\quad w_1X_1 + w_2X_2$$

$$\text{s.a:}\quad e\,X_1^{1/5}X_2^{4/5} = y$$

$$L = w_1X_1 + w_2X_2 + \lambda(y - e\,X_1^{1/5}X_2^{4/5})$$

CPO:

$$dL/dX_1 = w_1 - 1/5\lambda\,eX_1^{-4/5}X_2^{4/5} = 0$$

$$dL/dX_2 = w_2 - 4/5\lambda\,eX_1^{1/5}X_2^{-1/5} = 0$$

$$dL/d\lambda = y - X_1^{1/5}X_2^{4/5} = 0$$

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\frac{1}{5}\lambda e X_1^{-4/5} \cancel{X_2}^{4/5}}{\frac{4}{5}\lambda e X_1^{1/5} \cancel{X_2}^{-1/5}}$$

Reduciendo:

$$X_1 = \frac{w_2 X_2}{4 w_1} \qquad ...(\alpha)$$

$$X_2 = \frac{4 w_1 X_1}{w_2} \qquad ...(\beta)$$

Se remplaza (β) en la restricción, y se halla la demanda condicional del factor X_1:

$$Y = eX_1^{1/5}\left(\frac{4 w_1 X_1}{w_2}\right)^{4/5}$$

$$Y = eX_1\left(\frac{4 w_1}{w_2}\right)^{4/5}$$

$$X_1 = \frac{Y}{e}\left(\frac{w_2}{4 w_1}\right)^{4/5}$$

Asimismo, X_2se obtiene remplazando (α) en la restricción:

$$Y = e\left(\frac{w_2 X_2}{4 w_1}\right)^{1/5} X_2^{4/5}$$

$$Y = eX_2\left(\frac{w_2}{4 w_1}\right)^{1/5}$$

$$X_2 = \frac{Y}{e}\left(\frac{4 w_1}{w_2}\right)^{1/5}$$

Finalmente, la función de costos:

$$C(w,Y) = w_1\left[\frac{Y}{e}\left(\frac{w_2}{4w_1}\right)^{4/5}\right] + w_2\left[\frac{Y}{e}\left(\frac{4w_1}{w_2}\right)^{1/5}\right]$$

$$C(w,Y) = w_1^{1/5} w_2^{4/5}\frac{Y}{e}4^{-4/5} + w_1^{1/5} w_2^{4/5}\frac{Y}{e}4^{1/5}$$

$$C(w,Y) = w_1^{1/5} w_2^{4/5} \frac{Y}{e}\left(4^{-4/5} + 4^{1/5}\right)$$

$$C(w,Y) = w_1^{1/5} w_2^{4/5} \frac{Y}{2{,}718281828}(1{,}64937)$$

$$C(w,Y) = 0{,}606769722 \;\; w_1^{1/5} w_2^{4/5} Y$$

b) Si Y = 10.000 y los precios de los factores sonW_1=5 y W_2= 10, entonces el costo de producción será:

$$C = 0{,}606769722 \;\; (5)^{1/5}(10)^{4/5}(10.000)$$

$$C = 52.822{,}37$$

Las cantidades demandadas de factores:

$$\Rightarrow \qquad X_1 = \frac{10.000}{2{,}718281828}\left(\frac{10}{4(5)}\right)^{4/5}$$

$$X_1 = 2.113$$

$$\Rightarrow \qquad X_2 = \frac{10.000}{2{,}718281828}\left(\frac{4(5)}{10}\right)^{1/5}$$

$$X_2 = 4.226$$

c) En este caso se recurre al concepto de elasticidad escala de producción o elasticidad producto:

$$\xi_{X_1} = \frac{\Delta\% Y}{\Delta\% X_1} = \frac{\partial Y}{\partial x_1}\frac{x_1}{Y}$$

Si $\qquad Y = e\, X_1^{1/5} X_2^{4/5}$

Entonces, $\qquad \frac{\partial Y}{\partial x_1} = \frac{1}{5} e X_1^{-4/5} X_2^{4/5}$

Remplazando en fórmula de elasticidad, y simplificando:

$$\xi_{X_1} = \tfrac{1}{5} e X_1^{-4/5} X_2^{4/5} \frac{X_1}{e X_1^{1/5} X_2^{4/5}}$$

$$\xi_{X_1} = \tfrac{1}{5}$$

Retomando la fórmula de elasticidad:

$$\xi_{X_1} = \frac{\Delta \% Y}{\Delta \% X_1} = \tfrac{1}{5}$$

En atención al enunciado:*el uso del factor X_1 aumenta en 30%*:

$$\frac{\Delta \% Y}{30\%} = \tfrac{1}{5}$$

Entonces,

$$\Delta \% Y = \tfrac{1}{5}(30\%)$$

$$\Delta \% Y = 6\%$$

d) De manera similar:

$$\xi_{X_2} = \tfrac{4}{5}$$

En la fórmula de elasticidad:

$$\xi_{X_2} = \frac{\Delta \% Y}{\Delta \% X_2} = \tfrac{4}{5}$$

Como el factor X_2 aumenta 20%:

$$\frac{\Delta \% Y}{20\%} = \tfrac{4}{5}$$

Entonces,

$$\Delta \% Y = \tfrac{4}{5}(20\%)$$

$$\Delta \% Y = 16\%$$

2.2. Funciones de producción de Leontiev

1. Doña Clara, una experta cocinera, para preparar una tortilla perfecta requiere básicamente huevos frescos y su harina secreta, en la proporción fija siguiente: 5 huevos y ½ taza de harina.
   La harina secreta la prepara para el día, no se puede almacenar. En el mercado un huevo se cotiza en S/ 0,50, mientras que la harina secreta implica un costo de S/ 2,00 la taza.

   Se pide:

   a) Formular la función de producción
   b) Dibujar la isocuanta para un nivel de producción de 10 tortillas.
   c) Si doña Clara preparó 12 tazas de harina para el día y vende 20 tortillas ¿cuál será su costo de producción?
   d) Si la harina se pudiesen almacenar ¿Cuál sería el costo de producir 20 tortillas?.

Solución

a)
$$Y(x_1,x_2) = Mín \left(\frac{1}{5}x_1 ;\ 2x_2 \right)$$

Donde:

Y: cantidad de tortillas
x_1: cantidad de huevos
x_2:cantidad de tazas de harina secreta

b) Sabemos que, en general,

$$x_i = \frac{Y}{a_i}$$

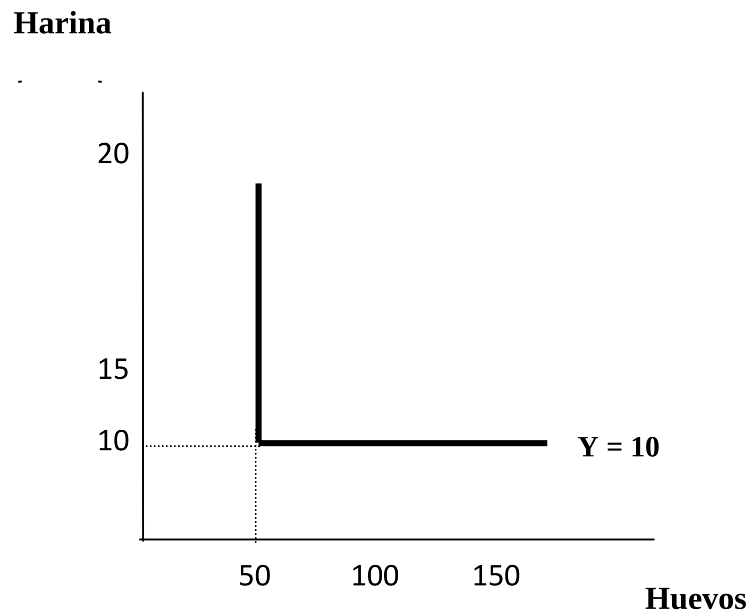
Entonces:

$$x_1 = \frac{Y}{1/5} \qquad y \qquad x_2 = \frac{Y}{2}$$

Por tanto,
$$x_1 = \frac{10}{1/5} = 50$$

$$x_2 = \frac{10}{2} = 5$$

Gráficamente:



c) En este caso, se encontraría en una situación de corto plazo con un factor fijo (Harina) y un factor variable (Huevos).

Para producir 20 tortillas (Y = 20):

Se tiene el volumen del Factor Fijo[10]

$$\bar{x}_2 = 12$$

---

[10]Con esta cantidad se podría producir: Y = 2*12 = 24 Tortillas

Se necesitará la siguiente cantidad del Factor variable:

$$x_1 = \frac{20}{1/5} = 100$$

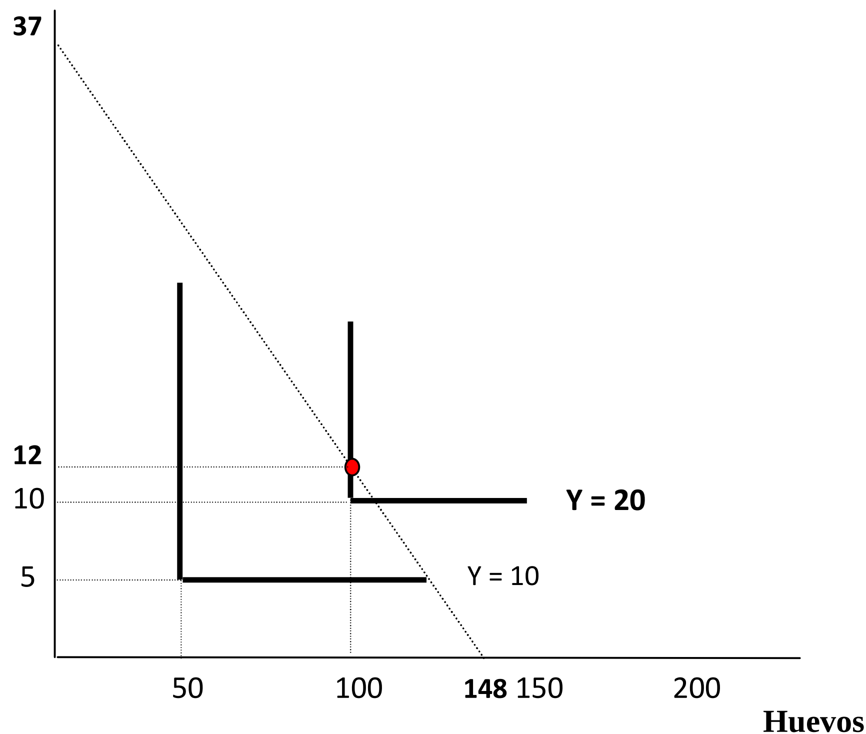
Entonces, el costo mínimo de corto plazo:

$$C = C.V. + C.F.$$

$$C = 0{,}50 \times 100 + 2{,}00 \times 12$$

$$C = 74{,}00$$

Gráfico



d) En este otro caso, se encontraría en una situación de largo plazo –todos los factores son variables- entonces,

Si Y = 20

$$x_1 = \frac{20}{1/5} = 100 \qquad x_2 = \frac{20}{2} = 10$$

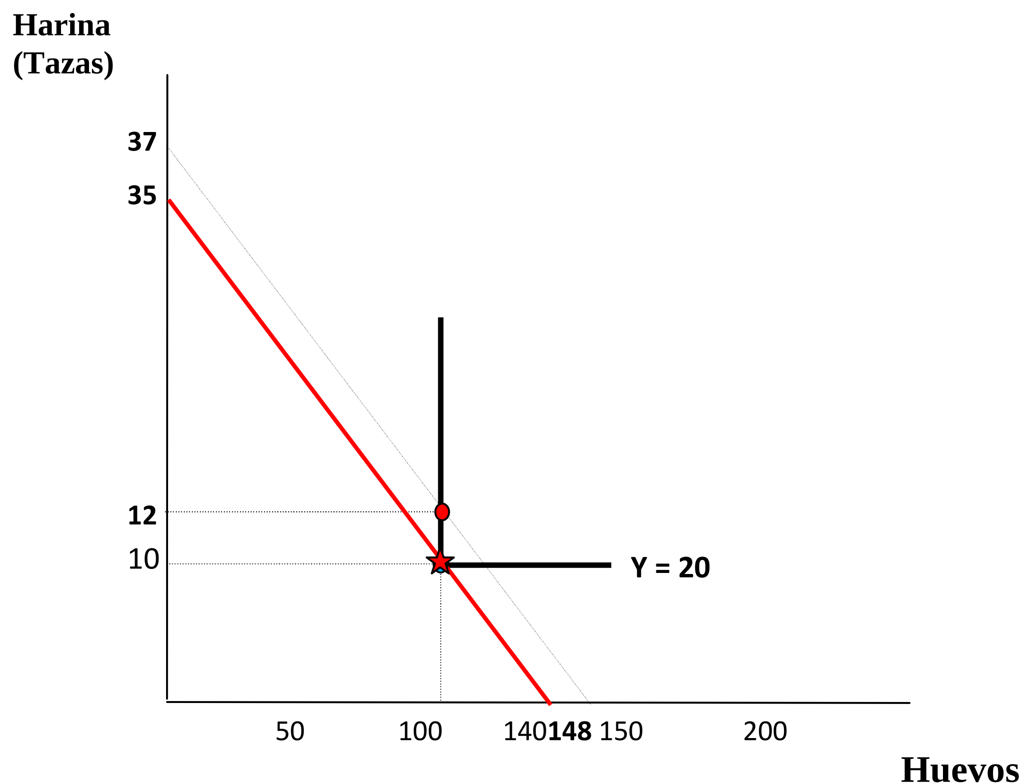
Costo mínimo:

$$C = w_1 x_1 + w_2 x_2$$

$$C = 0{,}50 \times 100 + 2{,}00 \times 10$$

$$C = 70{,}00$$

Gráfico



2. Una empresa tiene dos posibles actividades para producir el bien Y:

- La actividad A, que para producir una unidad del bien Y, emplea 2 unidades del factor x_1 y 1 unidad del factor x_2.
- La actividad B, usa 1/2 unidad de x_1 y 2 unidades de x_2 para elaborar una unidad de Y.

Si los precios de los factores son w = (1, 2), determine:

a) La función de producción
b) Las demandas para los dos factores
c) ¿Cuál es la función de costos para esta tecnología?
d) Grafique

Solución

a) La función de producción será de la forma:

$$Y(x_1, x_2) = Mín.\ (a_1 x_1,\ a_2 x_2) + Mín.\ (b_1 x_1,\ b_2 x_2)$$

Entonces,

$$Y(x_1, x_2) = Mín.\ \left(\frac{1}{2}x_1,\ x_2\right) + Mín.\ \left(2x_1,\ \frac{1}{2}x_2\right)$$

Esta formulación implica que la empresa debe de elegir, de forma excluyente, una de las dos técnicas para producir el bien. Su elección dependerá de los costos.

c) Las demandas:

Si usa proceso A:

$$Y = Mín.\ \left(\frac{1}{2}x_1,\ x_2\right)$$

Entonces,

Las demandas de factores serán:

$$x_1^A = \frac{y}{1/2} = 2y \qquad\qquad x_2^A = \frac{y}{1} = y$$

<u>Si usa proceso B</u>:

$$Y = Mín.\left(2x_1, \frac{1}{2}x_2\right)$$

Las demandas de factores serán:

$$x_1^B = \frac{y}{2} \qquad\qquad x_2^B = \frac{y}{1/2} = 2y$$

Función de costos

<u>Proceso A</u>:

$$C^A = w_1 2y + w_2 y$$

$$C^A = (2w_1 + w_2)y$$

<u>Proceso B</u>:

$$C^B = w_1 \frac{y}{2} + w_2 2y$$

$$C^B = \left(\frac{w_1}{2} + 2w_2\right)y$$

Entonces,

$$C(y,w) = Mín.\left(2w_1 + w_2, \quad \frac{w_1}{2} + 2w_2\right)y$$

Como $w_1 = 1$ $w_2 = 2$, los costos serán:

<u>Proceso A</u>:

$$C^A = (2w_1 + w_2)y$$

$$C^A = 4y$$

Proceso B:

$$C^B = \left(\frac{w_1}{2} + 2w_2\right) y$$

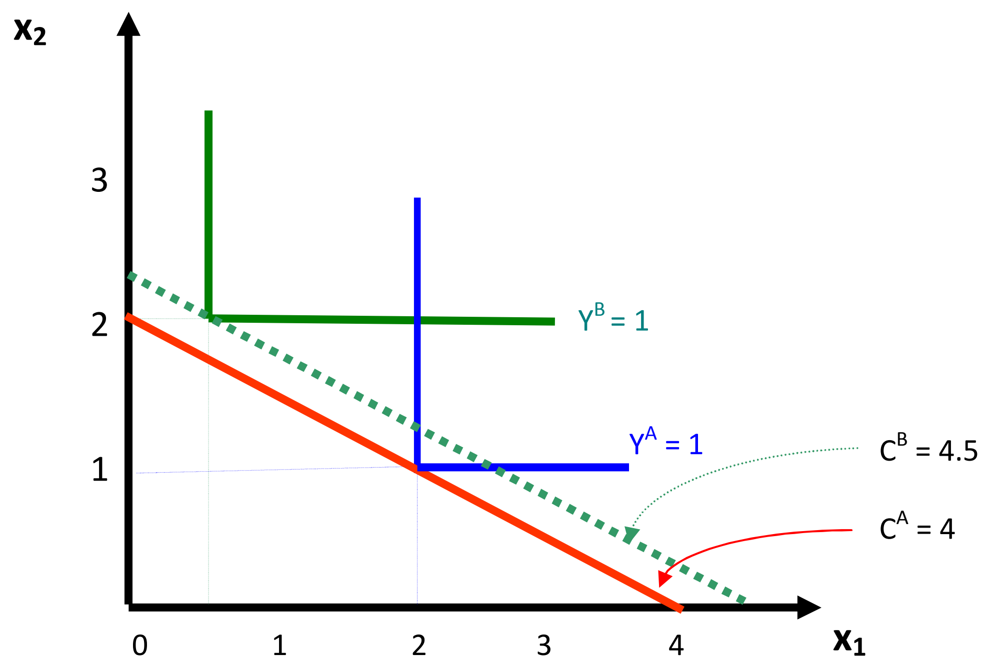
$$C^B = 4.5y$$

Por tanto, el proceso elegido será el proceso A

d) Gráfico

Si $y = 1 \rightarrow \quad x^A = (2, 1)$

$x^B = (½, 2)$



3. Sea la función de producción siguiente:

$$Y(x_1, x_2, x_3, x_4) = Mín.\left(x_1 + 2x_2, \quad \frac{1}{2}x_3 + 3x_4\right)$$

¿Cuál es la función de costos de esta tecnología?

Solución:

Considerando la primera técnica, sí ésta es utilizada, entonces la función de producción será:

$$y = x_1 + 2x_2$$

Dado que es lineal, la empresa será típicamente especializada en el empleo de uno u otro factor, y demandará:

$$x_1 = y \qquad ó \qquad x_2 = y/2$$

dependiendo de cuál sea más barato.

Por lo tanto la función de costos de esta técnica será[11]:

$$C(y, w) = Mín.\left(w_1, \frac{w_2}{2}\right)y$$

Similarmente, las funciones de demanda y la función de costos para la otra técnica serán:

---

[11]Si $Y = aX_1 + bX_2$, tendremos una función de costos para una tecnología lineal (los factores son sustitutos perfectos) ; esto implica que se utilizará sólo el factor más barato. Así , la función tendrá la forma:

$$C(w_1, w_2, Y) = Min.\ (w_1/a, w_2/b).Y$$

VéaseH.Varian "Microecomic Analysis".W.W. Norton & Co. 3d.Edition. 1992

$x_3 = 2y$ ó $x_4 = y/3$

$$C(y,w) = Mín.\left(2w_3, \frac{w_4}{3}\right)y$$

Dado que ambas técnicas deben ser empleadas para producir y unidades de producto, la función de costo de esta tecnología es:

$$C(w,y) = \left[Mín.(w_1, \frac{w_2}{2}) + Mín\left(2w_3, \frac{w_4}{3}\right)\right]y$$

4. Una empresa usa 4 insumos para producir un solo bien. La función de producción es

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = Mín.\ (x_1, x_2) + Mín.\ (x_3, x_4)$$

a) ¿Cuál es el vector de las demandas condicionales de factores para producir una unidad de producto cuando el vector de precios de los factores es: w = (1,2,3,4) ?
b) ¿Cuál es la función de costos?
c) ¿Qué clase de retornos a escala tiene esta tecnología?
d) Si otra empresa tiene una función: $f(X_1,X_2,X_3,X_4) = Min.(X_1 + X_2, X_3, + X_4)$ Cuál es el vector de las demandas condicionales de factores para producir una unidad de producto cuando los precios son w = (1,2,3,4)
e) ¿Cuál es la función de costos para esta firma?

Solución

a) Este modelo de función de producción de Leontiev consiste en la agregación de dos procesos productivos mutuamente excluyentes

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = Mín.\ (x_1, x_2) + Mín.(x_3, x_4)$$

Si $Y = 1$, $w_1 = 1$, $w_2 = 2$, $w_3 = 3$, y $w_4 = 4$,

Las demandas condicionales de factores serán:

$x_1 = y$ $x_2 = y$ $x_3 = y$ $x_4 = y$

El costo de producción de cada proceso:

$C(w_1, w_2, y) = w_1 y + w_2 y$ $C(w_3, w_4, y) = w_3 y + w_4 y$

Reemplazando los datos:

$C(w_1, w_2, y) = (1)(1) + (2)(1)$ $C(w_3, w_4, y) = (3)(1) + (4)(1)$

$= 3$ $= 7$

Por tanto, se prefiere el proceso menos costoso -el proceso que emplea los factores x_1 y x_2- y se descarta el más costoso. Así, la demanda de factores se representa por el vector

$$X(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv X(1, 1, 0, 0)$$

b) La función de costos se obtiene, agregando las funciones de costos de ambos procesos:

$C(w_1, w_2, y) = (w_1 + w_2)y$ $C(w_3, w_4, y) = (w_3 + w_4)y$

Entonces:

$$\mathbf{C(w_1, w_2, w_3, w_4, y) = Mín. \ [w_1 + w_2; \ w_3 + w_4] \ y}$$

c) Si variamos los insumos en t > 0, entonces la función de producción:

$$y' = Mín. \ (tx_1, tx_2) + Mín. (tx_3, tx_4)$$

$$y' = tMín. \ (x_1, x_2) + tMín. (x_3, x_4)$$

$$y' = t[Mín. \ (x_1, x_2) + Mín. (x_3, x_4)]$$

La producción también se ve afectada en t, por tanto, presenta rendimientos constantes a escala.

d) Si la función de producción es:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \ Mín.\ (x_1 + x_2, \quad x_3 + x_4)$$

La función de producción consta de dos procesos lineales, cada uno usa los factores de manera excluyente, basándose en los costos. La producción final se obtiene de ambos procesos.

Empleando los datos:

$$Y = 1, \quad w_1 = 1, \quad w_2 = 2, \quad w_3 = 3, \quad y \quad w_1 = 4$$

Con el primer proceso:

$$Y = x_1 + x_2$$

las demandas de factores: $x_1 = y$ ó $x_2 = y$

Para determinar que factor se empleará, calculamos cuál es más barato:

$C_{X1} = w_1\, y$

$= (1)(1)$

$= 1$

$C_{X2} = w_2\, y$

$= (2)(1)$

$= 2$

Entonces, empleará x_1

Con el segundo proceso:

$$y = x_3 + x_4$$

las demandas de factores: $x_3 = y$ ó $x_4 = y$

Calculamos los costos:

$C_{X3} = w_3\, y$ $\qquad\qquad$ $C_{X4} = w_4\, y$

$= (3)(1)$ $\qquad\qquad$ $= (4)(1)$

$= 3$ $\qquad\qquad$ $= 4$

Entonces, en este proceso sólo empleará x_3

Así, el vector de demanda condicional de factores, en este caso, es:

$$X(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv X(1, 0,1, 0)$$

e) Las función de costos, para cada proceso, será:

$C^1 = \text{Mín.}\ (w_1 y,\ w_2 y)$ $\qquad\qquad$ $C^2 = \text{Mín.}\ (w_3 y,\ w_4 y)$

$C^1 = \text{Mín.}\ (w_1,\ w_2) y$ $\qquad\qquad$ $C^2 = \text{Mín.}\ (w_3,\ w_4) y$

Como la función de costos implica seleccionar el costo mínimo de cada proceso, la función de costos es lineal:

$$C\ (W\ ,\ y) = \left[Mín\ .\ (w_1,\ w_2)\ +\ Mín\ \left(w_3,\ w_4\right)\right] y$$

5. Dada la siguiente función de producción:

$$Y(x_1, x_2) = \left[Mín\ .\ \left(\frac{1}{2} x_1\ +\ \frac{3}{2} x_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

a) Halle las funciones de demanda de factores
b) Halle la función de costos a largo plazo. Si $w_1 = 0.5$; y $w_2 = 1{,}5$ ¿ cuál sería el costo total para una producción de 120 unidades?.
c) Dibuje el Cme y el Cmg y señale que tipo de rendimientos a escala presenta.
d) Halle la producción óptima y las ganancias de la empresa cuando el precio de venta es de 100

Solución

a) Funciones de demanda:

Sabemos que:

- $$Y = \left(\frac{1}{2}x_1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 2Y^2$$

- $$Y = \left(\frac{3}{2}x_2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{2}{3}Y^2$$

b) Función de costos

Partiendo de la ecuaciåon de costos

$$C = w_1 X_1 + w_2 X_2$$

Reemplazando las funciones de demanda

$$C(w,Y) = w_1.(2Y^2) + w_2.\left(\frac{2}{3}Y^2\right)$$

Luego si $w_1 = 0{,}5$; y $w_2 = 1{,}5$; entonces:

$$C(w,Y) = 0{,}5\,(2Y^2) + 1{,}5\left(\frac{2}{3}Y^2\right)$$

$$C(w,Y) = 2Y^2$$

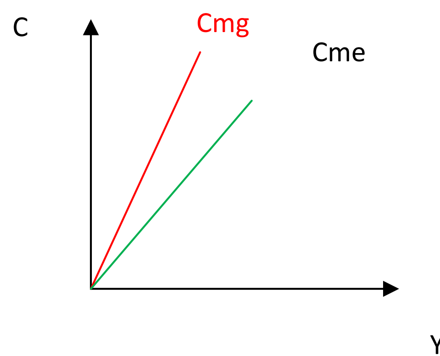
Si Y= 120, entonces:

C = 28.800

c) Costo medio y costo marginal

$$CMe = \frac{C}{Y} = 2Y$$

$$CMg = \frac{\partial C}{\partial Y} = 4Y$$



Se puede observar que el costo marginal está por encima del costo medio, por tanto presenta rendimientos decrecientes a escala.

d) La producción de equilibrio

Si el precio de venta de Y es 100

En equilibrio:

CMg=IMg

4Y = 100

Y = 25

Las cantidades demandadas de factores:

$$x_1 = 2(25)^2 = 1.250$$

$$x_2 = \frac{2}{3}(25)^2 = 416,67$$

Nivel de ganancias:

$$\pi = P.Y - C$$

$$= P.Y - 2Y^2$$

$$= (100)(25) - 2(25)^2$$

$$= 2.500 - 1.250$$

$$\pi = 1.250$$

6. Dada la siguiente función de producción:

$$Y(x_1, x_2) = \left[Mín \left(x_1, \frac{1}{5} x_2 \right) \right]^2$$

a) Halle las funciones de demanda de factores.
b) Halle la función de costos. Dibuje el Cme y el Cmg y señale que tipo de rendimientos a escala presenta.
c) Si la empresa puede gastar 10.500 unidades monetarias, y los precios de los factores son $w_1 = 2.5$; y $w_2 = 3$ ¿cuál sería el nivel de producción? ¿cuál sería la demanda de factores productivos?
d) Si el precio de mercado del bien Y es de 10 unidades monetarias, ¿la empresa estará optimizando?

Solución

a) Funciones de demanda de factores:

Sabemos que:

- $Y = (x_1)^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = Y^{\frac{1}{2}}$

- $Y = \left(\frac{1}{5}x_2\right)^2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 5Y^{\frac{1}{2}}$

b) Función de costos

$$C = w_1 X_1 + w_2 X_2$$

Reemplazando las funciones de demanda

$$C(w,Y) = w_1.\left(Y^{\frac{1}{2}}\right) + w_2.\left(5Y^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$C(w,Y) = (w_1 + 5w_2)Y^{\frac{1}{2}}$$

Costo medio y costo marginal

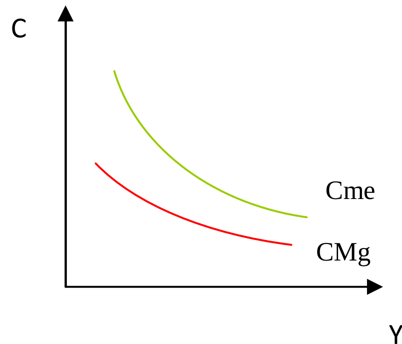
$$CMe = \frac{C}{Y}$$

$$CMe = \frac{(w_1 + 5w_2)}{Y^{\frac{1}{2}}}$$

$$CMg = \frac{\partial C}{\partial Y}$$

$$CMg = \frac{(w_1 + 5w_2)}{2Y^{\frac{1}{2}}}$$

Gráfico



Como el costo marginal está por debajo del costo medio, la función de producción presenta rendimientos crecientes a escala.

c) Si la empresa gasta 10.500 y los precios de los factores son w_1= 25 y w_2= 30, remplazando en la función de costos, y despejando:

$$10.500 = \left(25 + 5(30)\right) Y^{\frac{1}{2}}$$

$$10.500 = (175) Y^{\frac{1}{2}}$$

$$Y = \left(\frac{10.500}{175}\right)^2$$

$$Y = 3.600$$

La demanda de factores:

$$\Rightarrow \qquad x_1 = Y^{\frac{1}{2}}$$

$$x_1 = (3.600)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_1 = 60$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 5Y^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2 = 5(3.600)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2 = 300$$

d) Con los datos anteriores y con el precio de venta unitario de Y de 3,5

En equilibrio:

CMg = IMg

Introduciendo los precios en el CMg

$$CMg = \frac{(w_1 + 5w_2)}{2Y^{\frac{1}{2}}}$$

$$CMg = \frac{175}{2Y^{\frac{1}{2}}} = \frac{87{,}5}{Y^{\frac{1}{2}}}$$

Retomando el equilibrio:

$$\frac{87{,}5}{Y^{\frac{1}{2}}} = 3{,}5$$

$$Y^{\frac{1}{2}} = 25$$

$$Y^* = 625$$

La demanda de factores:

$$\Rightarrow \quad x_1^* = Y^{\frac{1}{2}}$$

$$x_1^* = (2.500)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_1^* = 25$$

$$\Rightarrow \quad x_2^* = 5Y^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2^* = 5(625)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2^* = 125$$

Nivel de ganancias de equilibrio:

$$\pi = P.Y - C$$

$$= P.Y - (w_1 x_1 + w_2 x_2)$$

$$= (3,5)(625) - [25(25) + 30(125)]$$

$$= 2.187,5 - 4.375$$

$$\pi = -2.187.5$$

Nivel de ganancias gastando 10,500 $\qquad$ Y = 3.600

$$\pi = P.Y - C$$

$$= P.Y - (w_1 x_1 + w_2 x_2)$$

$$= (3,5)(3.600) - [25(60) + 30(300)]$$

$$= 12.600 - 10.500$$

$$\pi = 2.100$$

En este caso, cuando se tiene rendimientos crecientes a escala el equilibrio va implicar pérdidas (CMe> P=Cmg) por ello cuanto más se produzca las pérdidas se reducirán, incluso habrán beneficios extraordinarios.

III. INTERVENCION ESTATAL

---

3. 1. Externalidades y Bienes Públicos

1. La demanda privada de un bien responde a la ecuación

$$P = 100 - 0{,}25x$$

Cada unidad del bien x provee a los consumidores una externalidad positiva de 20unidades monetarias.
Por otro lado, la oferta del bien es $P^o = 0{,}25x$

a) Determine la ecuación de la demanda social de este bien
b) Halle la valoración privada y la valoración social del bien. Grafique.
c) Halle el nivel en el cual la valoración social del bien x es igual a su costo social de producirla.
d) Calcule la magnitud de la pérdida social. Grafique
e) Que medida debe tomar el gobierno para eliminar la pérdida social.

Solución

a) La demanda social del bien (P^s) será igual a su demanda privada (P) más la externalidad (Ex), así:

$$P^s = P + Ex$$

Entonces,

$$P^s = 100 - 0{,}25x + 20$$

$$P^s = 120 - 0{,}25x$$

b) Para hallar la valoración privada hay que hallar el equilibrio natural del mercado:

$$P = P^o$$

Entonces,

$$100 - 0{,}25x = 0{,}25x$$

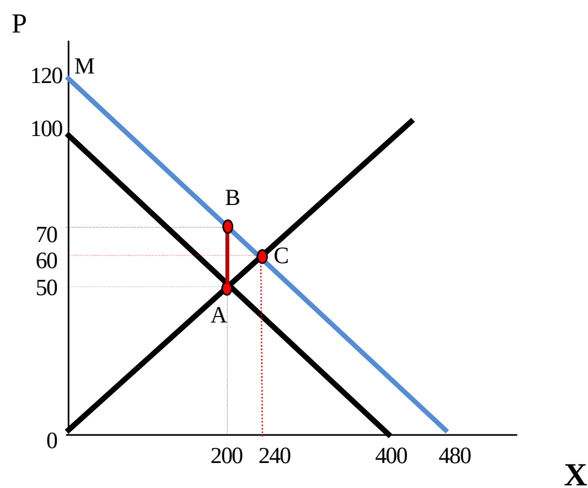
$$100 = 0{,}5x$$

$$x = 200$$

Así, la valoración privada del bien x es:

$$P = 50$$

Grafico: Mercado del bien x



y la valoración social de cada una de las 200 unidades del bien X será 70 unidades monetarias, es decir, la valoración privada más el monto de la externalidad.

c) La igualdad entre la valoración social del bien y el costo marginal de producirlo implica hallar el equilibrio entre la demanda social y la oferta:

$$P^s = P^o$$

Luego, $120 - 0{,}25x = 0{,}25x$

$$120 = 0{,}5x$$

$$x = 240$$

y $P = 60$

En el gráfico, este equilibrio está representado por el punto C.

d) En el gráfico, la pérdida social esta representada por el triángulo ABC

Si el equilibrio se diese con la demanda social, éste ocurriría en el punto C, donde:

$$\text{Exc. Cosumidor} = \frac{(120-60)x240}{2} = 7.200$$

$$\text{Exc. Productor} = \frac{60\ x\,240}{2} = 7.200$$

Pero como el equilibrio natural ocurrirá en el punto B, los excedentes serán:

$$\text{Exc. Cosumidor} = \frac{(120-70)x200}{2} + (70-60)x200 = 7.000$$

$$\text{Exc. Productor} = \frac{50x200}{2} + (60-50)x200 = 7.000$$

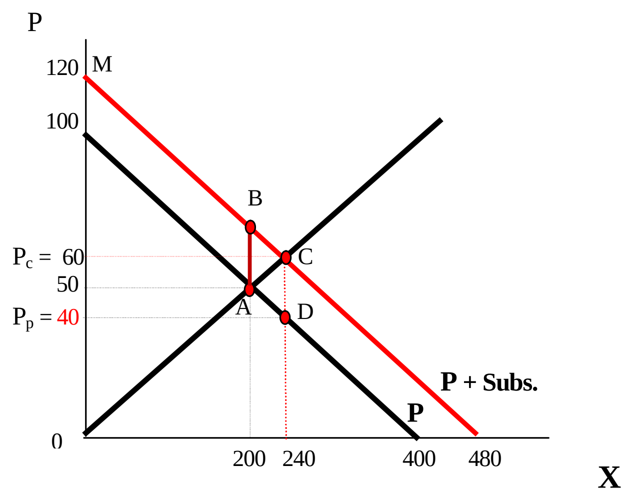
Así, la pérdida social será: 14.400 - 14.000 = 400

Que viene a ser el monto representado por el triángulo ABC:

$$\Delta ABC = \frac{(70-50)(240-200)}{2} = \frac{800}{2} = 400$$

e) Para evitar la pérdida social el gobierno tiene que otorgar un subsidio que haga que la demanda privada se traslade hacia la derecha hasta que se iguale a la oferta en el punto C.

Gráfico. Subsidio al consumidor



El precio que pagaría el consumidor (P_C) sería 40, mientras que el productor ecibiríaun precio (P_p) de 60, la diferencia -20- sería el subsidio por cada unidad transada en el mercado. El desembolso total del gobierno, por este concepto , será:

Subsidio Total = 20 x 240 = 4.800

2. Defina que es un bien público? De ejemplos

Un bien público es aquel bien o servicio que cumple dos condiciones:

1º. **Su consumo es No Excluyente**. No se puede excluir a nadie de su consumo.

La exclusión o no exclusión de un bien implica la posibilidad de asignarle o no un precio. Si no es excluyente no habría interés del sector privado por producirlo, sólo podría ser suministrado por el Estado.

Si es excluyente su producción será emprendida por la empresa privada o la empresa pública.

2º. **No existe rivalidad en su consumo**. Esto significa que el consumo de una persona no reduce o afecta el consumo de los demás.

Ejemplos de bienes públicos: La defensa nacional, el alumbrado público, señal de TV abierta, faro.

3. Cómo se clasifican los bienes según cumplan o no la exclusión y la rivalidad

El cuadro siguiente nos permite tipificar los bienes de acuerdo a si cumplen o no con la exclusión y la rivalidad:

	EXCLUYENTE	**NO EXCLUYENTE**
RIVAL	BIEN PRIVADO Mercado buen asignador de recursos	BIEN IMPURO(Público) Ejem. Carretera congestionada Tren eléctrico en periodo de prueba y hora punta.
NO RIVAL	BIEN IMPURO(público o privado) Ejem. TV cable, fuegos artificiales, parque de las leyendas, cine, Internet.	BIEN PUBLICO PURO Estado único mecanismo asignador de recursos

4. Que es un Free rider

En la jerga económica free rider significa colado, viajero sin billete, gorrón, parásito, polizón, etc. Este término hace referencia a un individuo que se beneficia de un bien o servicio sin haber contribuido a su financiamiento,

algunos también señalan que un free rider es un emisor de externalidades negativas que no paga a los perjudicados[12],
En economía pública un free rider es aquel individuo que tiene interés en beneficiarse de un bien público, el ejército, la policía, el alumbrado público, pero no está dispuesto a pagar por él. Los bienes públicos generan el problema del free rider[13]. Para evitar la existencia free-riders y los agravios comparativos que generan el que unos paguen y otros no, los bienes públicos deben ser siempre provistos por el gobierno.

5. Un bien publico tiene una estructura de costos cuya función es:

$$C = 2X^2 - X + 56$$

Sus ingresos totales tienen como función:

$$IT = 31X$$

a) Determine el nivel de la producción si la empresa fuera del Estado. Grafique.
b) ¿Cuál será el nivel de producción eficiente de este bien?.Grafique.

Solución

a) Cuando la empresa que provee el bien público es del Estado, el equilibrio implica producir en el nivel donde se igualen el ingreso total con el costo total, donde no existan beneficios extraordinarios.
Entonces,

$$IT = CT$$

$$31X = 2X^2 - X + 56$$

---

[12]BIENES PÚBLICOS, EXTERNALIDADES Y LOS FREE-RIDERS: EL ARGUMENTO RECONSIDERADO* Alberto Benegas-Lynch (h). en Estudios Públicos, 71 (invierno 1998). Buenos Aires.

[13]Extraido de http://economy.blogs.ie.edu/archives/2007/01/que_es_un_free.php

$$2X^2 - 32X + 56 = 0$$

Resolviendo la cuadrática

$$X = 14$$

El nivel de producción sería de 14 unidades, y el Ingreso total:

$$IT = 31(14)$$

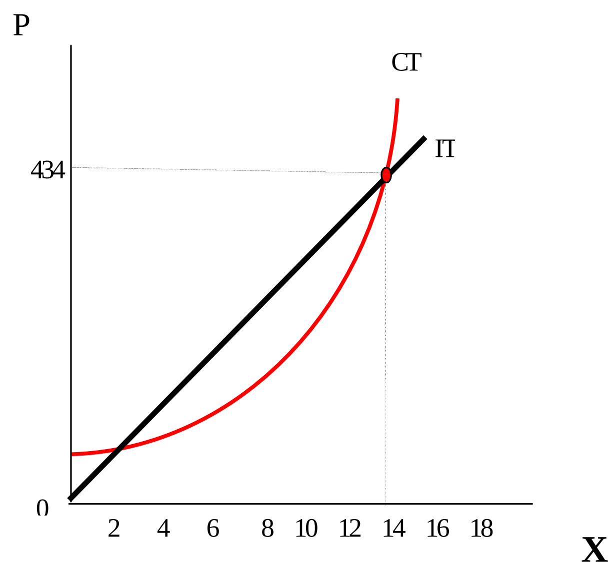
$$IT = 434$$

Asimismo, el costo total:

$$C = 2(14)^2 - (14) + 56$$

$$C = 434$$

Gráfico. Producción de la empresa pública



c) Si la empresa estuvieses buscando la eficiencia, tendría que producir en el nivel donde:

$$IMg = CMg$$

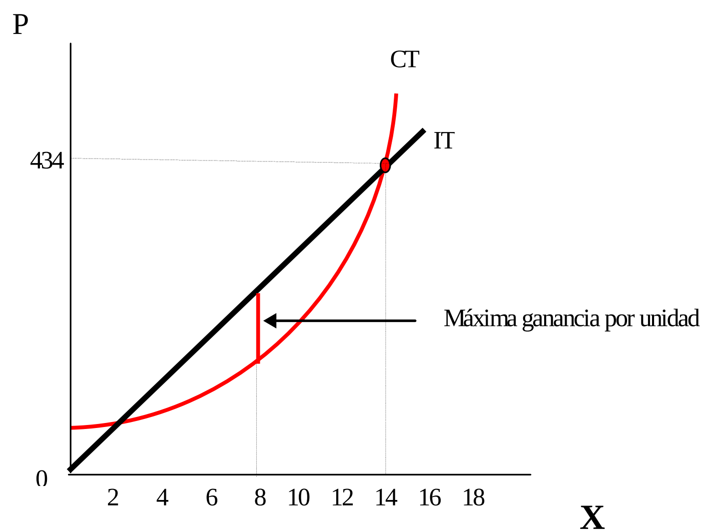
Remplazando,

$$31 = 4X - 1$$

$$X = \frac{32}{4}$$

$$X = 8$$

Gráfico. Producción eficiente de la empresa pública. Enfoque total



Entonces, cuando la empresa produce 8 unidades logra la máxima ganancia

Para calcular el monto de la ganancia primero obtenemos el ingreso total y el costo total:

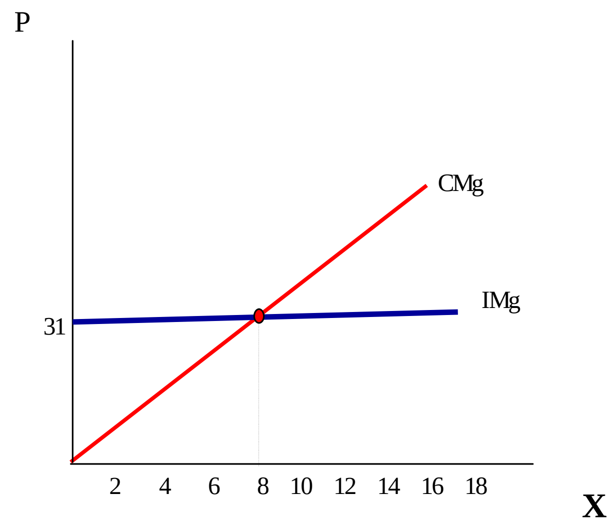
IT = 31 (8) = 248

CT = $2(8)^2$ -8 +56 = 76

Luego,

Ganancia = 248 – 176 = 72

Gráfico. Producción eficiente de la empresa pública. Enfoque marginal



3.2 Impuestos y Subsidios

1. Los mercados de trigo y de maíz están interrelacionados, de tal manera que las funciones de oferta y demanda de sus respectivos mercados son:

Trigo: $O_t = 14 + p_t - p_m$

$D_t = 30 - 15p_t + 7p_m$

Maíz: $O_m = -27 - 2p_t + 5p_m$

$D_m = 5 + 6p_t - 3p_m$

a) Encuentre los valores de equilibrio en ambos mercados
b) Si se grava con un impuesto específico de $1.00 a los productores de maíz, halle los nuevos valores de equilibrio.
c) Si el impuesto fuera el mismo pero para el trigo en lugar del maíz ¿cuáles serían los nuevos precios y cantidades de equilibrio?.

SOLUCIÓN

a) Equilibrio de Mercados

Mercado del Trigo:

$O_t = D_t$ $\qquad 14 \Rightarrow -p_m = 30 - 15p_t + 7p_m$

$16p_t - 8p_m = 16$ ...... *(1)*

Mercado del Maíz:

$O_m = D_m$ $\qquad \Rightarrow 27 - 2p_t + 5p_m = 5 + 6p_t + -3p_m$

$-8p_t + 8p_m = 32$ .....*(2)*

Resolviendo el sistema *(1) y (2)*:

$16p_t - 8p_m = 16$ ......*(1)*

$-8p_t + 8p_m = 32$ ......*(2)*

Precios:

$p_t = 6 \quad p_m = 10$

Cantidad:

Trigo: $O_t = D_t = 10$

Maíz: $O_m = D_m = 11$

b) **<u>Efectos de un impuesto</u>**: $t = 1$

Mercado del Maíz

Sabemos que $p_m^o = p_m^d - t$

Entonces: $p_m^o = p_m^d - 1 \quad \ldots \quad (\alpha)$

Reemplazando (α) en funciones de oferta y demanda:

$$O_m = -27 - 2p_t + 5\,(p_m^d - 1)$$

$$D_m = 5 + 6p_t - 3\,p_m^d$$

En equilibrio:

$$O_t = D_t \quad \Rightarrow -p_t + 8p_m^d = 37 \ldots\ldots (1')$$

Mercado del Trigo

Se reemplaza (α) en funciones de oferta y demanda:

$$O_t = 14 + p_t - p_m^d + 1$$

$$D_t = 30 - 15p_t + 7p_m^d$$

Luego se plantea el equilibrio:

$$O_t = D_t \quad 16p_t \Rightarrow -8p_m^d = 17 \ldots\ldots (2')$$

Finalmente, el equilibrio se halla resolviendo el sistema:

$- 8p_t \ +8p_m^d = 37$ .....(1´)

$16p_t \ - 8p_m^d = 17$ .....(2´)

Precios:

$p_t = 6.75$

$p_m^d = 11.375$

$p_m^o = 10.375$

Cantidades:

$O_t = D_t = 8.375$

$O_m = D_m = 11.375$

2. La demanda de gallinas en un centro poblado de la selva está conformada por la de tres poblaciones dispersas: la primera tiene 10 familias con una demanda individual $p = 20 - x^a$; la segunda, 4 familias, cada una con la demanda individual $p = 20 - 0{,}5x^b$; y la tercera con 10 jefes de familia con una demanda personal $x^c = 50 - p$.

   Por otro lado, la oferta de gallinas en este centro poblado responde a la función

   $X = p - 1.$

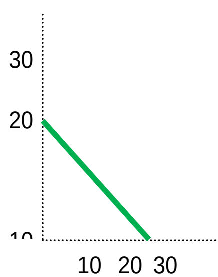
   a) Grafique la curva de demanda de este centro poblado.
   b) Halle el equilibrio del mercado.
   c) ¿Cuál será la elasticidad precio de la demanda para p = 12?.
   d) ¿Para qué nivel de precios maximizarán los vendedores de gallinas los ingresos.

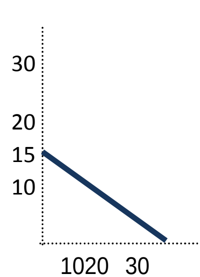
   Solución

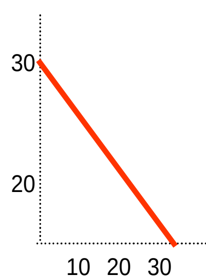
   a) La demanda del centro poblado viene a ser la demanda agregada de las demandas de las tres poblaciones dispersas, las que a su vez, están conformadas por las demandas agregadas de las familias respectivas.

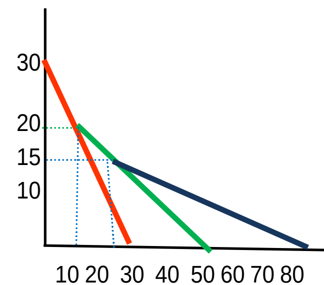
Como la agregación es de unidades del bien, las variables de las dos primeras funciones deben de transmutarse. Entonces, tendremos:

Poblado A	Poblado B	Poblado C	Mercado:
$x^a = 20 - p$	$x^b = 30 - 2p$	$x^c = 30 - p$	▪ $30 \geq p \geq 20 \rightarrow x^c = 30 - p$ ▪ $20 \geq p \geq 15 \rightarrow x^{c+a} = 50 - 2p$ ▪ $p \leq 15 \rightarrow x^{a+b+c} = 80 - 4p$









b) Equilibrio de mercado

Primero graficamos la función de oferta: $X = p - 1$.

Entonces, ubicamos dos puntos cualesquiera de ella:

p.e.: (0, 1) y (20, 21)

Se observa que el equilibrio ocurre en el tramo donde la demanda responde a la ecuación:

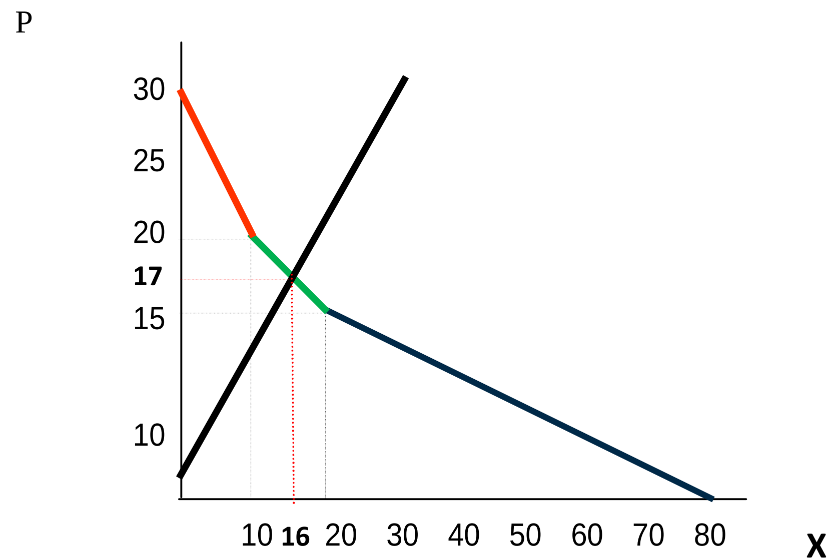
$$X = 50 - 2p.$$

Hallando el equilibrio:

$$50 - 2p = p - 1$$
$$3p = 51$$
$$p = 17$$

luego,

$$X = 16$$



c) Para p= 12, la demanda de mercado es X= 80 -4p , entonces X = 32

La elasticidad precio:

$$\xi = \frac{\partial X}{\partial p}\frac{p}{X}$$

$$\xi = (-4)\times\frac{12}{32}$$

$$\xi = -1{,}5$$

Este punto corresponde al tramo elástico de la demanda $(|\xi| \succ 1)$

d) La elasticidad precio también la podemos calcular así:

$$\xi = \frac{80 - X}{X}$$

Como el ingreso de los vendedores (o el gasto de los consumidores) es máximo cuando la elasticidad precio es igual a la unidad:

$$1 = \frac{80 - X}{X}$$

Efectuando, hallamos X:

$$X = 80 - X$$

$$2X = 80$$

$$X = 40$$

Entonces, el precio: $p = 10$

3. Una empresa que opera en un mercado competitivo estima que su función de costos se ajusta a la función siguiente:

$$C = 0{,}08Y^3 - 3Y^2 + 200Y + 30.000$$

El mercado del producto tiene las funciones de oferta y demanda siguientes:

$$p^o = 41 + 0{,}25Y$$
$$p^d = 3041 - 0{,}5Y$$

Determine:

a) El equilibrio de la empresa. Grafique
b) El beneficio total y el beneficio unitario de la empresa
c) Si la aparición de un bien sustituto hace que la demanda disminuya, paralelamente, en 11,08% , ¿Cómo varía el equilibrio?.Grafique.
d) ¿La empresa continuará obteniendo beneficios?

Solución

a) Equilibrio de la empresa

La empresa es tomadora de precios; por tanto, primero, hay que hallar el equilibrio del mercado. Entonces, igualamos la oferta y demanda:

$$p^o = p^d$$

$$41 + 0{,}25Y = 3.041 - 0{,}5Y$$
$$0{,}75Y = 3.000$$
$$Y = 4.000$$

$$Luego, \quad p = 1.041$$

Hallando equilibrio de la empresa:

Primera condición:

$$CMg = IMg = p$$

$$0{,}24Y^2 - 6Y + 200 = 1{,}041$$

$$Ordenando\ y\ resolviendo:$$

$$0{,}24Y^2 - 6Y - 841 = 0$$

$$Y = 73$$
$$Y = -48$$

Segunda condición:

$$\frac{\partial CMg}{\partial Y} > 0 \qquad (pendiente\ del\ CMg\ debe\ ser\ positiva)$$

$$0{,}48Y - 6 > 0$$

$$Entonces,\ si \quad Y = 73:$$

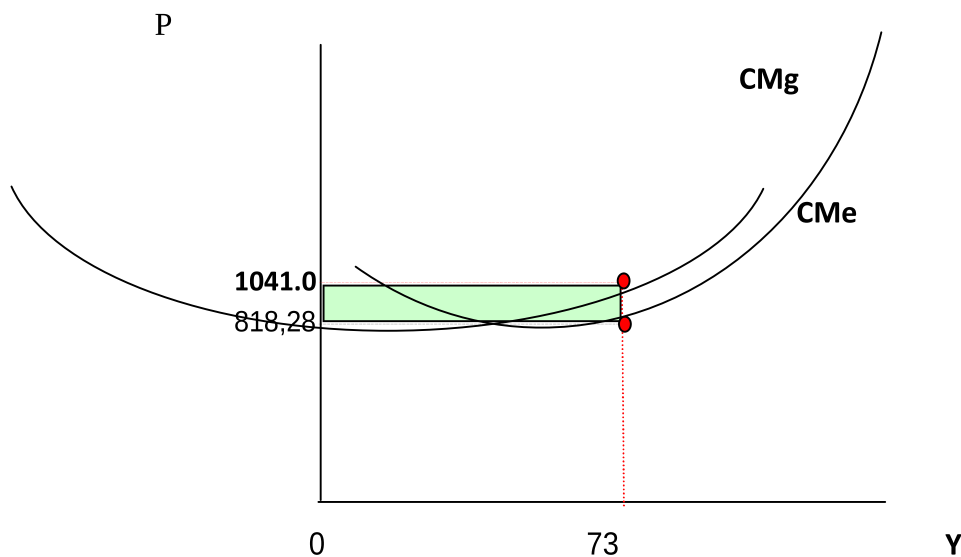
$$48(73) - 6 > 0$$
$$3.504 - 6 > 0$$
$$3.498 > 0 \qquad (Sí \quad cumple)$$

$$Si \quad Y = -48:$$

$$48(-48) \; -6 \; > \; 0$$
$$-2.304 \; - \; 6 \; > \; 0$$
$$-2.298 \; > \; 0 \qquad (No \quad cumple)$$

La empresa se encuentra en equilibrio produciendo 73 unidades del producto.

Gráfico: **Equilibrio de la empresa**



b) Beneficios de la empresa

Beneficio Total

Ingreso Total = P xY = (1041) x (73) = 75.993,00

- Costo Total = $0{,}08(73)^3 - 3(73)^2 + 200(73) + 30.000$ = 59.734,36

= Beneficio Total = 16.258,64

Beneficio unitario

Ingreso Unitario	= IT/Y = PY/Y = P	=	1041.00
- Costo Unitario	= CT/Y = CMe	=	818,28
= Beneficio unitario =		=	222,72

c) Nuevo Equilibrio por Disminución de la demanda

Situación inicial:

$$Y^o = 4p - 164$$
$$Y^d = 6082 - 2p$$

Disminución de la demanda:

$$Y^1 = -(11{,}08\%)(6082)$$
$$Y^{'} = -674$$

Nueva demanda:

$$Y^{d'} = 6082 - 2p - 674$$
$$Y^{d'} = 5408 - 2p$$

Nuevo Equilibrio de mercado:

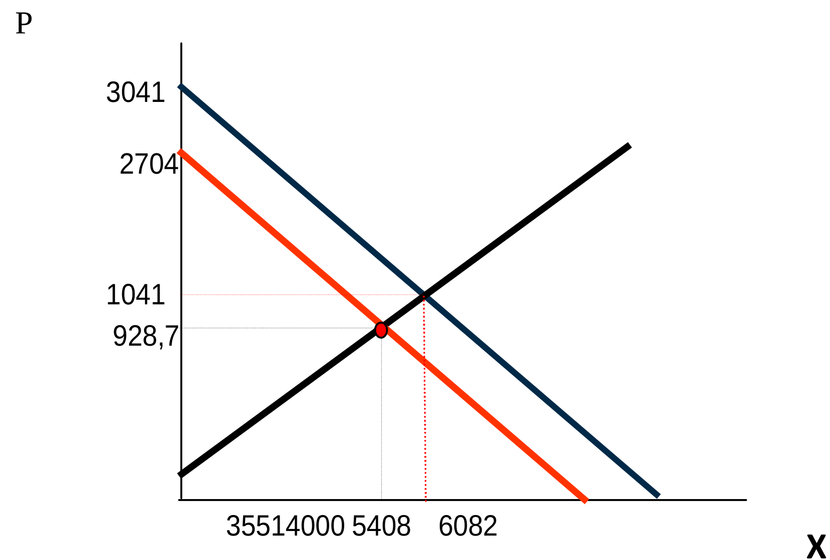
$$Y^o = Y^{d'}$$

$$4p - 164 = 5408 - 2p$$

$$p^1 = 928{,}67$$

$$Y = 3.550{,}7$$

Gráfico: NuevoEquilibrio del mercado



Nuevo equilibrio de la empresa:

Primera condición: $CMg = IMg = p^1$

$$0{,}24Y^2 - 6Y + 200 = 928{,}7$$

Ordenando y resolviendo :

$$0{,}24Y^2 - 6Y - 728{,}7 = 0$$

$$Y = 69 \quad y$$
$$Y^1 = -44$$

Segunda condición:

$$\frac{\partial CMg}{\partial Y} > 0 \qquad (pendiente\ del\ CMg\ debe\ ser\ positiva)$$

$$0{,}48Y - 6 > 0$$

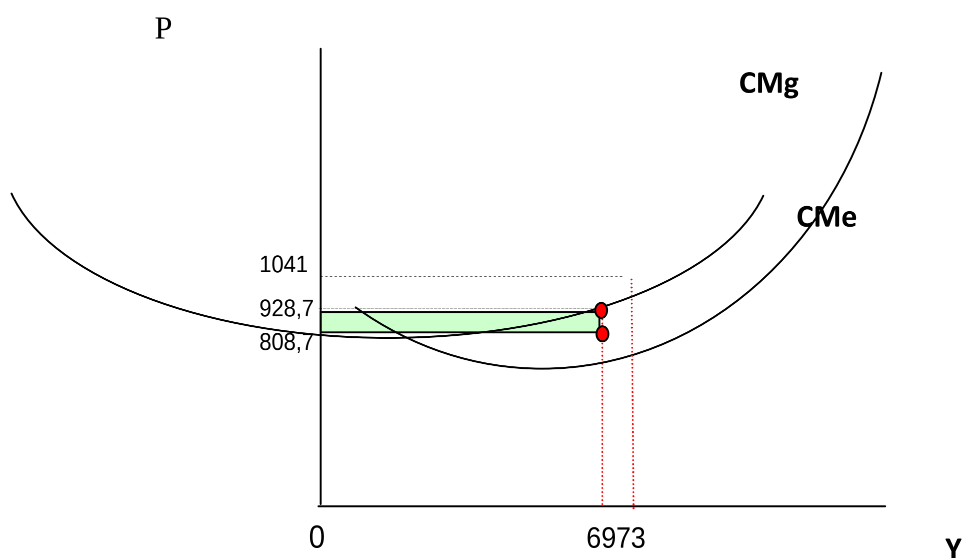
$$Entonces,\ si \quad Y = 69:$$

$$48\,(69)\ -6\ >\ 0$$
$$3.312\ -\ 6\ >\ 0$$
$$3.306\ >\ 0 \qquad (Sí \quad cumple)$$

$$Si \quad Y = -44:$$

$$48\,(-44)\ -6\ >\ 0$$
$$-2.112\ -\ 6\ >\ 0$$
$$-2.106\ >\ 0 \qquad (No \quad cumple)$$

Gráfico: NuevoEquilibrio de la empresa



d) Beneficios de la empresa

Beneficio Total

Ingreso Total	= P xY = (928,67) x (69)	=	64.078,23
- Costo Total	= $0,08(69)^3 - 3(69)^2 + 200(69) + 30.000$	=	55.797.72
= Beneficio Total		=	8.280,51

Beneficio unitario

Ingreso Unitario =	IT/Y = PY/Y = P	=	928,67
- Costo Unitario =	CT/Y = CMe	=	808,66
= Beneficio unitario =		=	120.01

4. En una zona algodonera de Cañete, la demanda de mercado de este producto responde a la función p = 178 -0,5Y, y la producción, a la función p = Y -2. En estas funciones Y representa quintales de algodón, y p el precio por quintal.

   a) Si un pequeño agricultor algodonero de la zona tiene una función de costos totales $C = 0{,}5Y^3 - 0{,}25Y^2 + 500$, ¿cuál será su producción óptima?.
   b) ¿Obtendrá beneficios o pérdidas?

   Este año, el gobierno no piensa subsidiar monetariamente este producto pues tiene reservas compradas, a precio de garantía, en la campaña pasada. Esta vez va a hacer uso de sus reservas, entregando al agricultor un 25% adicional a su producción.

   c) ¿Cuánto producirá el agricultor?
   d) ¿Cuánto recibirá del Estado?
   e) ¿En cuánto mejorará su situación?

Solución

a) Primero se determina el equilibrio del mercado:

$$178 - 0{,}5Y = Y - 2$$

$$1{,}5Y = 180$$

$$Y = 120$$
$$p = 118$$

Luego, el equilibrio del productor:

$$IMg = CMg$$

$$p \;\; = 1{,}5Y^2 - 0{,}5Y$$

$$\text{Re}\,emplazando \quad p = 118$$

$$1{,}5Y^2 - 0{,}5Y - 118 = 0$$

$$\text{Re}\,solviendo:$$

$$Y = \;\; 9$$
$$Y = -9$$

El productor optimizará su producción cultivando 9 quintales.

b) Se sabe que: π = IT –C

IT =	p.Y = 118 * 9	=	1.062,00
C =	$0{,}5(9)^3 - 0{,}25(9)^2 + 500$	=	844,25
Π =			217,75

c) En este caso:

$$I.T. = p(Y + 0{,}25Y)$$

$$IMg = \; p + 0{,}25p$$

$$IMg = 1{,}25p$$

El equilibrio:

$$1{,}25p = 1{,}5Y^2 - 0{,}25Y$$

Remplazando: p =118

$$1{,}5Y^2 - 0{,}25Y - 147{,}5 = 0$$

Resolviendo:

$$Y = 10$$

d) El agricultor recibirá del estado:

$$Y' = 0{,}25\,Y$$

$$Y' = 0{,}25\,(10)$$

$$Y' = 2{,}5 \ \ quint\,ales$$

e) Para saber cuánto mejora el agricultor, se debe calcular su nuevo beneficio:

Π' = IT' –C'

I.T. = 118(12,5)	=	1.475,00
C = $0{,}5(10)^3$ -$0{,}25(10)^2$ +500	=	975,00
Π =	=	500,00

Este algodonero mejorará sus ingresos en:

(500-217,75) = 282,25

5. Una empresa monopólica que produce un bien industrial, tiene una demanda que proviene de dos poblaciones, norte y sur, cuyas respectivas funciones de demanda son:

$Y^N = 200 - 8p$ y

$Y^S = 146 - 2p$

Asimismo, tiene una función de costo total:

$$C = \frac{0{,}001}{3} Y^3 + 5Y + 1.000$$

a) Determine el equilibrio del monopolista. Grafique.
b) ¿El monopolista obtendrá beneficios o pérdidas?.
c) Si el Estado aplica un impuesto de monto fijo de 500 unidades monetarias ¿qué pasará con la producción?¿seguirá obteniendo beneficios extraordinarios?. Grafique.
d) En condiciones de competencia perfecta ¿cuál sería el precio y la cantidad de equilibrio?. Grafique.
e) Calcule la pérdida del excedente del consumidor al pasar de una situación de competencia perfecta a una de monopolio. Grafique

Solución

a) El equilibrio del consumidor implica satisfacer dos condiciones:

Primera condición: CMg = IMg

Entonces, se deduce el CMg:

$$CMg = 0{,}001\,Y^2 + 5$$

Luego, se tiene que determinar el IMg. Primero hallamos la demanda de mercado:

$$Y^N = 200 - 8p$$
$$Y^S = 146 - 2p$$

$$Y = 346 - 10p$$

Que en su forma inversa será:

$$p = 34{,}6 - 0{,}1Y$$

El Ingreso total: IT = P.Y

$$IT = 34{,}6Y - 0{,}1Y^2$$

Entonces,

$$IMg = 34{,}6 - 0{,}2Y$$

Retomando la primera condición, y reordenando:

$$0{,}001\,Y^2 + 5 = 34{,}6 - 0{,}2Y$$

$$0{,}001\,Y^2 + 0{,}2Y - 29{,}6 = 0$$

Resolviendo la cuadrática:

$$Y = 99$$
$$Y' = -299$$

la segunda condición: $$\frac{\partial CMg}{\partial Y} > \frac{\partial IMg}{\partial Y}$$

no es necesario aplicarla ya que uno de los resultados se descarta por ser negativo.

Finalmente el precio de equilibrio:

$$p = 34{,}6 - 0{,}1\,(99)$$
$$p = 24{,}7$$

Por tanto el monopolista se encontrará en equilibrio produciendo 99 unidades y fijando el precio en 24,70 unidades monetarias.

b) Obtendrá beneficios o pérdidas

Beneficio Total Monopolista

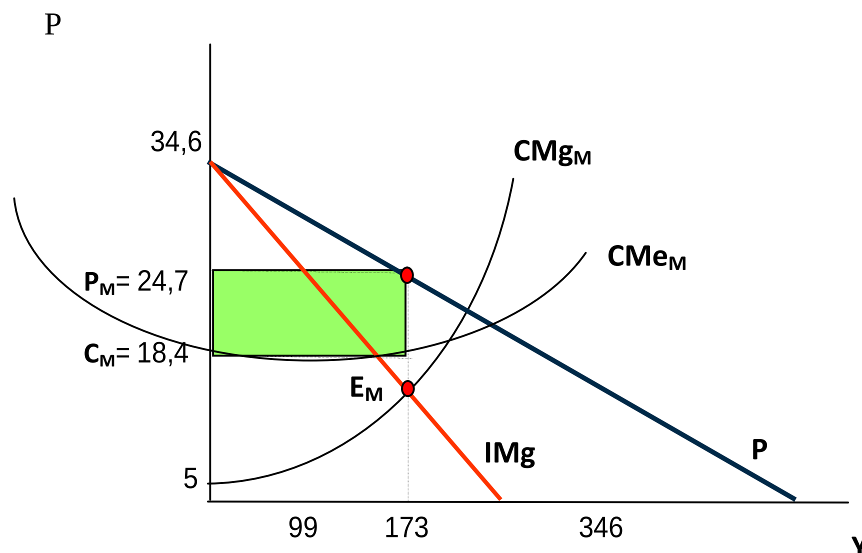
	Ingreso Total	= P xY = (24,7) x (99)	= 2.445,30
-	Costo Total	= $0{,}001/3(99)^3 + 5(99) + 1.000$	= 1.818,43
=	Beneficio Total		= 626.87

<u>Beneficio unitario Monopolista</u>

Ingreso Unitario	= IT/Y = PY/Y =	P_M =	24,70
- Costo Unitario	= CT/Y = CMe	C_M =	<u>18,37</u>
= Beneficio unitario =		B_M =	6,33

El monopolista está obteniendo beneficios extraordinarios

Gráfico: Equilibrio del Monopolista



c) Un impuesto de monto fijo de 500 unidades monetarias, afectará la función de costos:

$$C' = \frac{0{,}001}{3}Y^3 + 5Y + 1.000 + 500$$

$$C' = \frac{0{,}001}{3}Y^3 + 5Y + 1.500$$

Pero el costo marginal no se altera, por tanto, la producción de equilibrio permanece invariable.

El nuevo costo total será:

$$C' = \frac{0{,}001}{3}(99)^3 + 5(99) + 1.500$$

$$C' = 2.318.43$$

El costo medio:

$$C' = \frac{2.318{,}43}{99} = 23{,}43$$

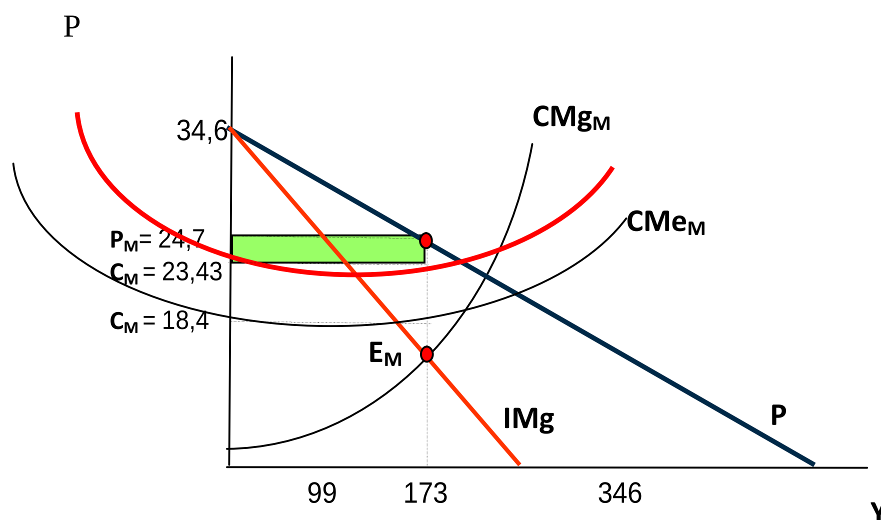
Los beneficios disminuirán pero seguirán siendo extraordinarios:

B = 24,7(99)- 2.318,43

B = 2.445,30 – 2.318,43

B = 126,87

Gráfico: Equilibrio del Monopolio con impuesto



d) En una situación comparativa con la competencia perfecta, el CMg del monopolista sería la curva de oferta del mercado, de tal manera que el equilibrio implicaría:

CMg = P

$$0{,}001\,Y^2 + 5 \;=\; 34{,}6 - 0{,}1Y$$

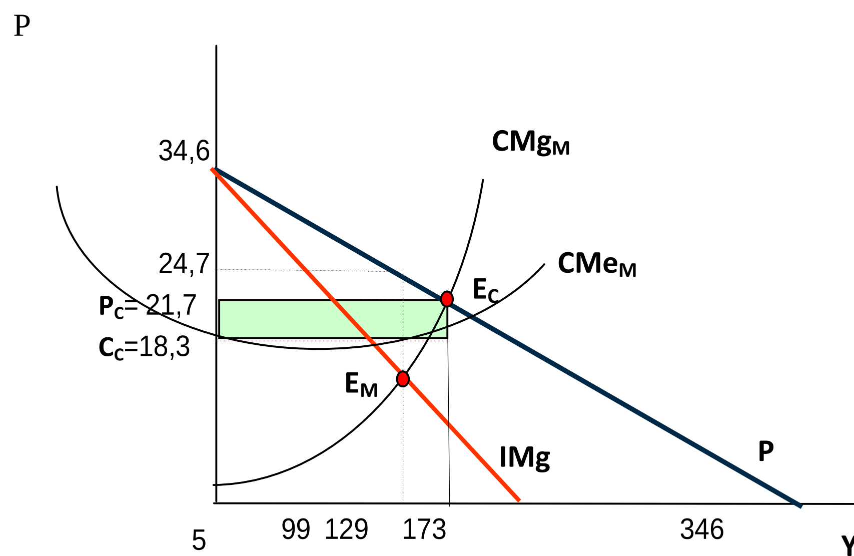
Resolviendo:

$$Y \;=\; 129 \qquad\qquad Y^{'} = -229 \;\; (se\ descarta\,)$$

Luego, el precio:

$$p = 34{,}6 \;\; - 0{,}1\,(129)$$
$$p = \;\; 21{,}7$$

Gráfico: Monopolio versus Competencia Perfecta



e) Pérdida del Excedente del consumidor

Excedente del consumidor en Monopolio:

$$EC_M \;=\; \frac{99 \;x\,(34{,}6 - 24{,}7)}{2} \;=\; 490{,}03$$

Excedente del consumidor en Competencia Perfecta:

$$EC_C = \frac{129\ x\,(34{,}6 - 21{,}7)}{2} = 832{,}05$$

Al pasar de una situación de competencia perfecta a una de monopolio, el consumidor pierde un excedente de 344.15 unidades monetarias.

2.Un monopolista se enfrenta a una curva de demanda representada por la función:

$$p = 20 - Y^{0,5}$$

Si su estructura de costos responde a la ecuación:

$$C = 8Y + 205$$

a) ¿Qué volumen le convendrá producir al monopolista y cuál será su precio de venta?
b) En una coyuntura de competencia perfecta ¿cuál sería el equilibrio?
c) ¿Cuánto más estaría ganando el monopolista con respecto a una situación alterna de Competencia perfecta
d) Si al monopolista le aplican un impuesto específico de 1,5 por cada unidad producida ¿cuál sería la proporción que pagan los consumidores?
e) Halle la parte del excedente del consumidor que se apropia el monopolista al no ser este mercado competitivo

Solución

a) Producción y precio del monopolista

Equilibrio del monopolista: IMg = CMg

Previamente, hay que calcular el IMg, partiendo del ingreso total (IT):

$$IT = P.Y$$

$$IT = (20 - Y^{0,5})Y$$

$$IT = 20Y - Y^{1,5}$$

Luego,

$$IMg = 20 - 1{,}5\,Y^{0,5}$$

El equilibrio:

$$8 = 20 - 1{,}5\,Y^{0,5}$$

Resolviendo:

$$1{,}5\,Y^{0,5} = 12$$

$$Y^{0,5} = 8$$

$$Y = 64$$

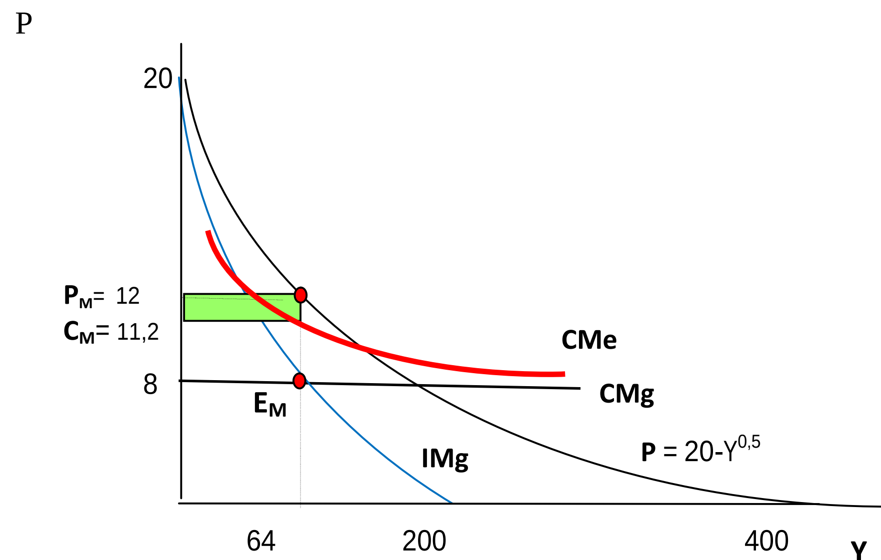
Entonces,

$$p = 20 - (64)^{0,5}$$

$$P = 12$$

Por tanto, maximizará beneficios produciendo 64 unidades, vendiéndolas a 12 unidades monetarias.

Gráfico: Equilibrio del Monopolista



b) Homologando con la competencia perfecta

El equilibrio: P = CMg

Entonces,

$$20 - Y^{0,5} = 8$$

Resolviendo:

$$Y^{0,5} = 12$$

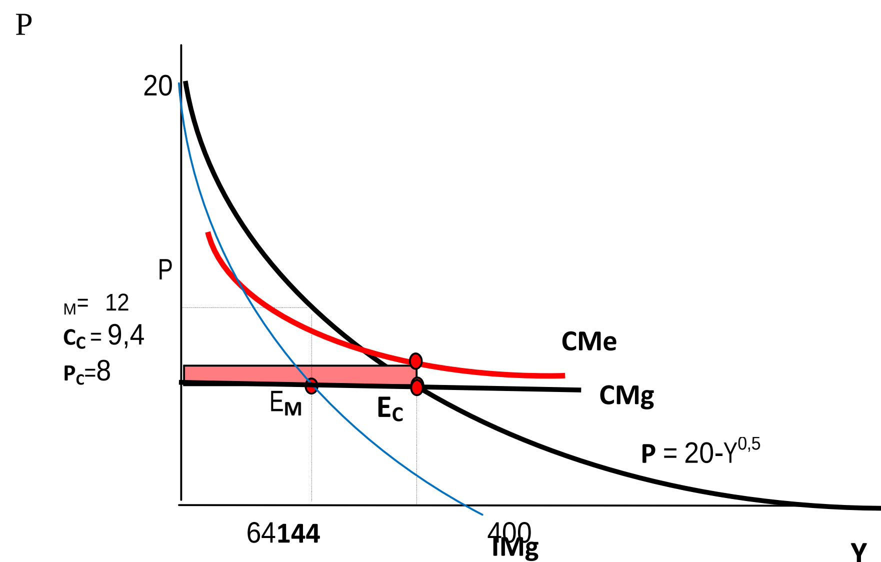
$$Y = 144$$

El precio:

$$p = 20 - (144)^{0,5}$$

$$p = 8$$

Gráfico: Comparación Competencia y Monopolio



c) Ganancias del monopolista con respecto a la Competencia perfecta

Beneficio Total

Monopolista

Ingreso Total	= P x Y = (12) x (64)	IT_M =	768,00
- Costo Total	= 8(64) + 205	CT_M =	717,00
= Beneficio Total		BT_M =	51,00

Competencia Perfecta

Ingreso Total	= P xY = (8) x (144)	IT_C =	1.152,00
-Costo Total	= 8(144) + 205	$-CTc$ =	1.357,00
= Beneficio Total		BTc=	**- 205,00**

Beneficio Unitario

Monopolista

Ingreso Unitario	= IT/Y = PY/Y =	P_M =	12,00
- Costo Unitario	= CT/Y = CMe	$-C_M$ =	11,20
= Beneficio unitario		B_M =	0,80

Competencia Perfecta

Ingreso Unitario	= IT/Y = PY/Y =	P_C =	8,00
- Costo Unitario	= CT/Y = CMe	$-C_M$ =	9,42
= Beneficio unitario =		B_M =	-1,42

El monopolista está obteniendo beneficios extraordinarios. Si la situación fuese de competencia perfecta habría pérdidas

c) Si al monopolista le aplican un impuesto específico de 1,5.

La ecuación de costos se ve modificada de la manera siguiente:

$$C = 8Y + 1{,}5Y + 205$$

$$C = 9{,}5Y + 205$$

Equilibrio:

$$IMg = CMg$$

$$20 - 1{,}5Y^{0,5} = 9{,}5$$

$$Y^{0,5} = \frac{10{,}5}{1{,}5}$$

$$Y = 7^2$$

$$Y = 49$$

Precio:

$$P = 20 - (49)^{0,5}$$

$$P = 20 - 7$$

$$P = 13$$

Proporción de pago de los consumidores:

Los consumidores pagarán 1 unidad monetaria más. Entonces, la proporción de este monto con respecto al impuesto:

$$\frac{1}{1{,}5} \equiv \frac{2}{3}$$

e) Excedente del consumidor (EC) que se apropia el monopolista al no estar éste en un mercado competitivo

EC en Competencia Perfecta

$$EC_C = \int_0^{144} (20 - Y^{0,5})dy - P_C Y_C$$

$$EC_C = \int_0^{144} (20 - X^{0,5})dx - (8)(144)$$

Efectuando:

$$EC_C = \left. 20Y - \frac{Y^{1,5}}{1,5} \right|_0^{144} - 1152$$

$$EC_C = \left[\left(20(144) - \frac{(144)^{1,5}}{1,5} \right) - 0 \right] - 1152$$

$$EC_C = [1728 - 0] - 1152$$

$$EC_C = 576$$

EC en Monopolio

$$EC_M = \int_0^{64} (20 - Y^{0,5}) dy - P_M Y_M$$

$$EC_M = \int_0^{64} (20 - Y^{0,5}) dy - (12)(64)$$

Efectuando:

$$EC_M = \left. 20Y - \frac{Y^{1,5}}{1,5} \right|_0^{64} - 768$$

$$EC_M = \left[\left(20.(64) - \frac{(64)^{1,5}}{1,5} \right) - 0 \right] - 768$$

$$EC_M = [939 - 0] - 768$$

$$EC_M = 171$$

El EC apropiado por el monopolista asciende a 405 unidades monetarias.

3. Los costos totales de producción de una empresa monopólica son representables a través de la función siguiente:

$$C = 0{,}01Y^2 + 9Y + 10.000$$

La demanda de mercado tiene como función:

$$Y = (86{,}25 - 1{,}25p)^2$$

En base a esta información se pide determinar:

a) El precio del monopolio
b) Las ganancias del monopolio. Grafique.
c) El impuesto a las ganancias que debe aplicar el Estado al monopolio permitiéndole obtener una ganancia del 25% sobre sus ingresos totales
d) Si el monopolista establece otra planta, la cual opera con una función de costos totales:

$$C' = \frac{Y^2}{120} + Y + 12.500$$

¿Cuánto producirá, y cuál será la producción de cada planta?

Solución

a) Precio del monopolista

Equilibrio del monopolista: IMg = CMg

Hallamos el IMg a partir del IT:

IT = P.Y

Así, de la función de demanda, obtenemos la función inversa:

$$Y = (86{,}25 - 1{,}25p)^2$$

$$86{,}25 - 1{,}25p = Y^{0,5}$$

$$1{,}25p = 86{,}25 - Y^{0,5}$$

$$p = 69 - 0,8Y^{0,5}$$

Luego,

$$IT = (69 - 0,8Y^{0,5})Y$$

$$IT = 69Y - 0,8Y^{1,5}$$

El ingreso marginal,

$$IMg = 69 - 1,2Y^{0,5}$$

Entonces, el equilibrio:

$$69 - 1,2Y^{0,5} = 0,02Y + 9$$

Ordenando:

$$0,02Y + 1,2Y^{0,5} - 60 = 0$$

Cambiando de variable:

$$Y^{0,5} = k \quad \Rightarrow \quad Y = k^2$$

Remplazando y resolviendo:

$$0,02k^2 + 1,2k - 60 = 0$$

$$k = 32,45 \quad y \quad k' = -92,45$$

Retomando la variable:

$$k = Y^{0,5} = 32,45$$

$$\Rightarrow \quad Y = 1053$$

El precio,

$$p = 69 - 0,8(1053)^{0,5}$$

$$P = 43{,}04$$

d) Beneficios del monopolista

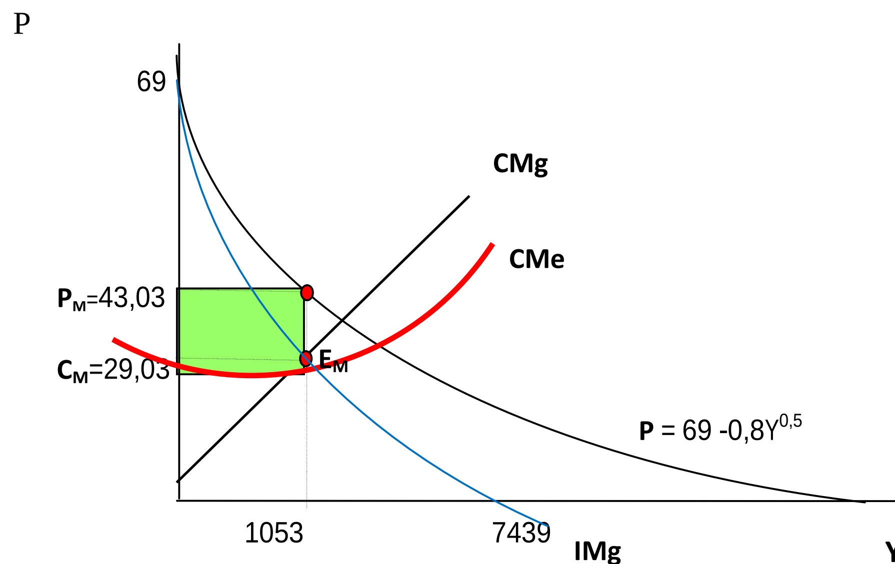
Beneficio Total

	Ingreso Total	= P xY = (43,04) x (1053)	= 45.321,12
-	Costo Total	= $0{,}01(1053)^3 + 9(1053) + 10.000$	= 30,565,09
	= Beneficio Total		= 14.756,03

Beneficio Unitario

Ingreso Unitario	= IT/Y = PY/Y =	P_M = 43,04
- Costo Unitario	= CT/Y = CMe	C_M = 29,03
= Beneficio unitario =		B_M = 14,01

Gráfico: Ganancias del Monopolio



e) El impuesto a las ganancias que debe aplicar el Estado al monopolio permitiéndole obtener una ganancia del 25% sobre sus ingresos totales

Se debe cumplir que:

$$\frac{B_M(1-t)}{IT} = 25\%$$

$$1-t = \frac{IT}{B_M}25\%$$

$$t = 1-\frac{IT}{B_M}25\%$$

Remplazando:

$$t \ = 1-\frac{45.321{,}19}{14.756{,}06}(0{,}25)$$

$$t \ = 1-0{,}7678$$

$$t \ = \ 0{,}2322 \ \approx \ 23{,}22\%$$

e) Si el monopolista establece otra planta, la cual opera con una función de costos totales:

$$C' = \frac{Y^2}{120} + Y \ + 12.500$$

¿Cuánto producirá, y cuál será la producción de cada planta?

En este caso, la producción óptima implica la condición de equilibrio del monopolista multiplanta:

$$\text{IMg} \ = \text{CMg} \ = \text{CMg}_1 \ = \text{CMg}_2$$

Primero, encontramos el Costo marginal agregado (CMg):

En planta 1, se halla CMg_1 y se despeja Y_1:

$$C_1 = 0{,}01Y_1^{\,2} + 9Y + 10.000$$

$$CMg_1 = 0{,}02Y_1 + 9$$

$$Y_1 = 50\,CMg_1 - 450$$

Asimismo, en la planta 2, se halla CMg_2 y se despeja Y_2:

$$C_2 = \frac{Y_2^{\,2}}{120} + 3{,}1Y_2 + 12.500$$

$$CMg_2 = \frac{Y_2}{60} + 3{,}1$$

$$Y_2 = 60CMg_2 - 186$$

Luego, se realiza la agregación, y se obtiene el CMg:

$$\begin{array}{l} Y_1 = 50\,CMg_1 - 450 \\ Y_2 = 60CMg_2 - 186 \\ \hline Y = 110\,CMg - 636 \end{array}$$

$$CMg = 0{,}0091Y + \frac{318}{55}$$

Entonces,

$$IMg = CMg$$

$$69 - 1{,}2\,Y^{0,5} = 0{,}0091Y + \frac{318}{55}$$

$$0{,}0091Y + 1{,}2Y^{0,5} - \frac{3477}{55} = 0$$

Cambiando de variable:

$$Y^{0,5} = k \qquad \Rightarrow \qquad Y = k^2$$

Remplazando y resolviendo:

$$0{,}0091k^2 + 1{,}2k - \frac{3477}{55} = 0$$

$$k = 40{,}35 \quad y \quad k' = -172{,}35$$

Retomando la variable:

$$k = Y^{0,5} = 32{,}45$$

$$\Rightarrow \quad Y = 1628$$

El precio,

$$p = 69 - 0{,}8(1628)^{0,5}$$

$$P = 36{,}72$$

Por tanto,

$$CMg = 0{,}0091(1628) + \frac{318}{55}$$

$$CMg = IMg = 20{,}59$$

Producción en planta 1:

$$CMg_1 = 20{,}59$$

$$0{,}02\,Y_1 + 9 = 20{,}59$$

$$Y_1 = 579$$

Producción en planta 2:

$$CMg_2 = 20{,}59$$

$$\frac{Y_2}{60} + 3{,}1 = 20{,}59$$

$$\frac{Y_2}{60} = 17{,}49$$

$$Y_2 = 1.049$$

ANEXOS

ANEXO 1

La Restricción Presupuestaria

El consumidor busca maximizar su utilidad condicionado al gasto de su renta disponible (m)

Dado el vector de precios de los bienes:

$$\mathbf{P = (p_1, p_2, \ldots p_n)}$$

y dado el vector de bienes:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

La restricción presupuestaria será:

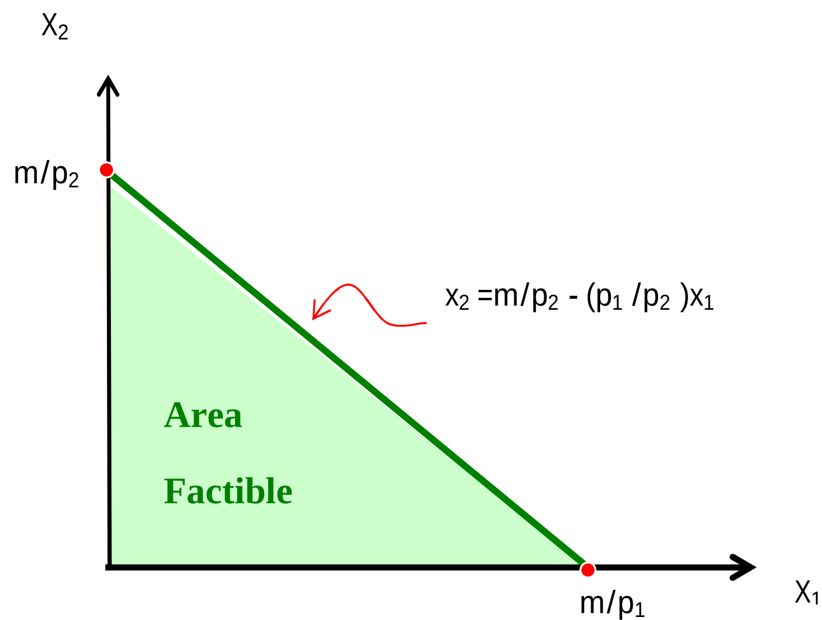
$$\mathbf{m = P.X}$$

$$\mathbf{m = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots p_n x_n}$$

En el plano bidimensional (dos bienes) la restricción presupuestaria sería:

$$\mathbf{m = p_1 x_1 + p_2 x_2}$$

Representación Gráfica de la Restricción presupuestaria



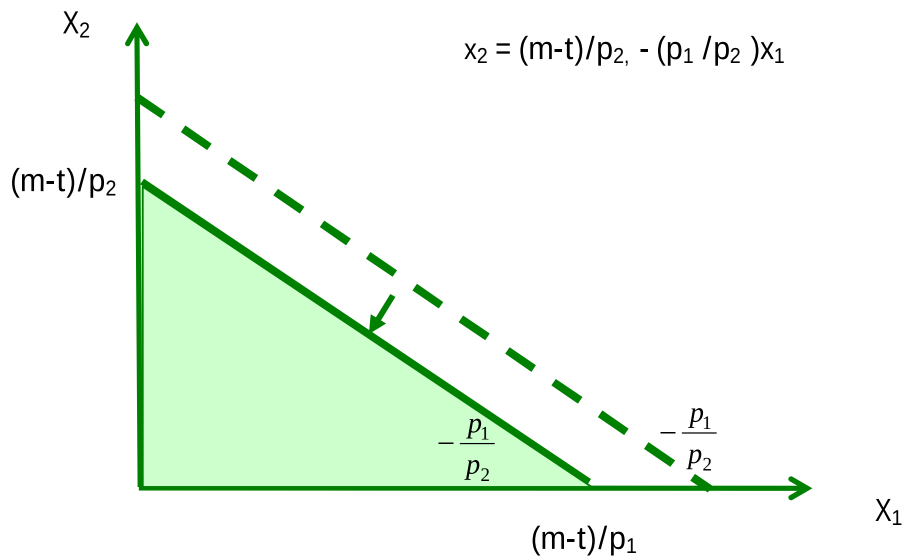
Alteraciones de la Restricción Presupuestaria

a) Impuestos

- ***Impuesto de monto fijo (sum lump)***

Tiene el efecto de un impuesto a la renta, reduce el área factible o área de consumo

Su efecto en la restricción presupuestaria será:



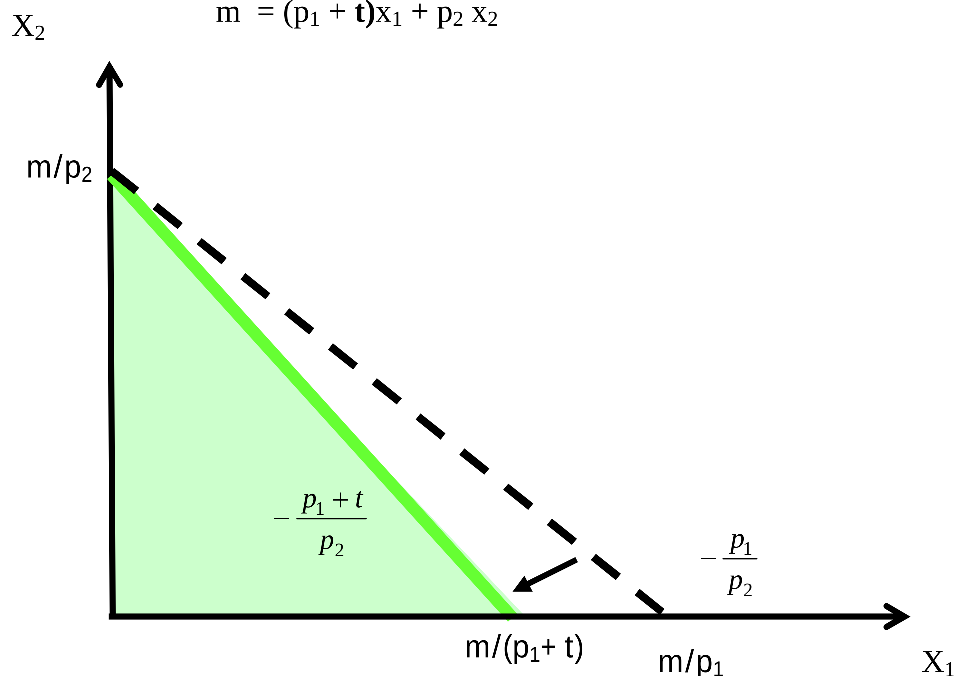
- ***Impuesto Específico sobre un bien***

  Se aplica un impuesto sobre cada unidad consumida de un bien. Con el ingreso monetario y los precios constantes, el consumo del bien afectado se reduce.

  Así, si se grava el consumo del bien x_1, entonces:

$$m = p_1 x_1 + \mathbf{t}.x_1 + p_2 x_2$$

$$m = (p_1 + \mathbf{t})x_1 + p_2 x_2$$



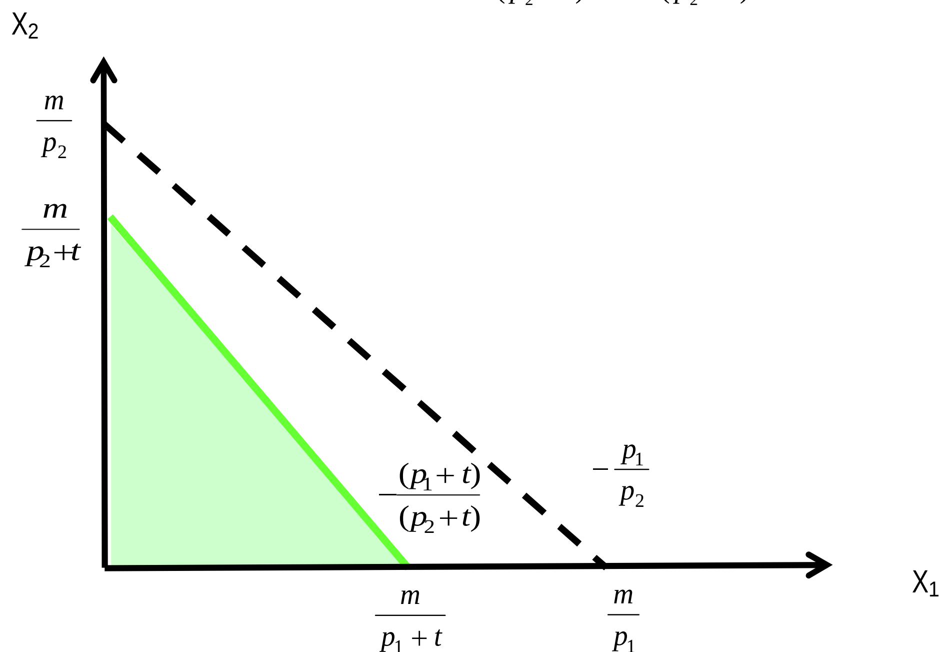
- ***Impuesto específico sobre los dos bienes***

$$m = p_1 x_1 + \mathbf{t.x_1} + p_2 x_2 + \mathbf{t.x_2}$$

$$m = (p_1 + \mathbf{t})x_1 + (p_2 + t)x_2$$

reordenando:

$$x_2 = \frac{m}{(p_2 + t)} - \frac{(p_1 + t)}{(p_2 + t)} x_1$$



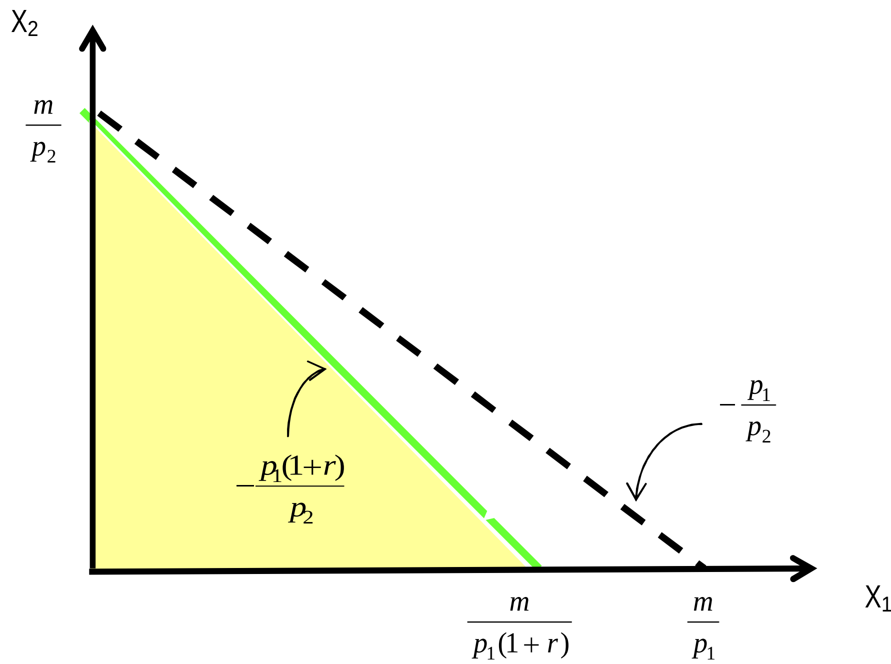
- ***Impuesto Ad valorem sobre un bien***

Es un impuesto aplicado sobre las ventas de un bien. Su efecto es similar al impuesto específico.

Si se gravan las ventas del bien x_1, con una tasa **r**, entonces:

$$m = p_1 x_1 + \mathbf{r.}\ p_1 \mathbf{x_1} + p_2 x_2$$

m = $\mathbf{p_1(1 + r)}$ $x_1 + p_2\, x_2$



- ***Impuesto Ad valorem sobre ambos bienes***

Si se gravan las ventas tanto del bien x_1 como del bien x_2, con una tasa **r**, entonces:

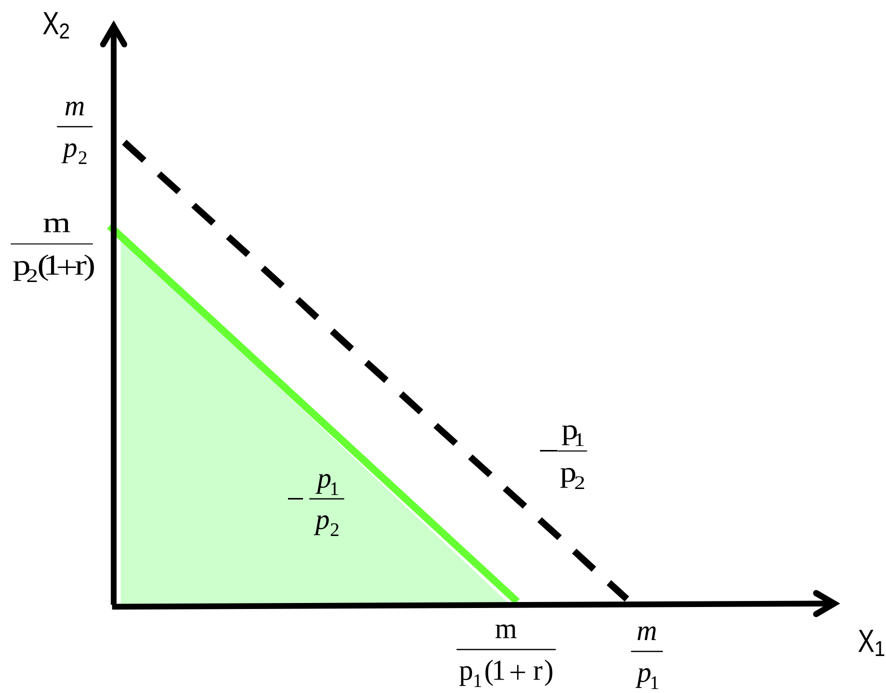
$$m = p_1 x_1 + r(p_1 x_1) + p_2 x_2 + r(p_2 x_2)$$

$$m = p_1 x_1 (1+r) + p_2 x_2 (1+r)$$

Reordenando y simplificando:

$$x_2 = \frac{m}{p_2(1+r)} - \frac{p_1(1+r)}{p_2(1+r)} x_1$$

$$x_2 = \frac{m}{p_2(1+r)} - \frac{p_1}{p_2} x_1$$



Anexo 2

Elasticidad y propiedades de la función de demanda

En el tema del comportamiento del consumidor se analizan algunas relaciones o propiedades, asociadas a las elasticidades, que deben cumplir los sistemas de demanda, denominadas condiciones, restricciones o propiedades de la función de demanda. Estas se deducen partiendo de la restricción presupuestaria (r.p.):

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p_i} \,.\, x_i(\boldsymbol{p},m) = \mathrm{m} \qquad \text{(i: bienes)}$$

(1) Porcentaje o peso del gasto en un bien

Dividiendo la r.p. por m, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i\, x_i}{m} = \frac{m}{m}$$

O de otra manera:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} w_i = 1}$$

(2) Condición de agregación de Engel

Diferenciando la r.p. con respecto a m:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial m} = 1$$

Multiplicando y dividiendo por x_i/m y su recíproco, obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i\, x_i}{m} \frac{\partial x_i}{\partial m} \frac{m}{x_i} = 1$$

O lo que es lo mismo:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \, \varepsilon_{m,i} = 1$$

(3) Condición de agregación de Cournot

Diferenciando la r.p. con respecto a pj:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_j} + x_j = 0 \qquad \text{(j: otro bien)}$$

Multiplicando y dividiendo el primer término por X_i; y multiplicando por P_j, y dividiendo por m, ambos términos, ordenamos y obtenemos:

O lo que es lo mismo:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i \mathbf{x_i}}{m} \frac{\partial x_i \, \mathrm{p_j}}{\partial p_j \mathbf{x_i}} = -\frac{\mathrm{p_j} x_j}{m}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \, \varepsilon_{i\,j} = -w_j$$

Cuando se tiene dos bienes:

Si varia P_1 → $w_1\varepsilon_{11} + w_2\varepsilon_{21} = -w_1$

Si varia P_2 → $w_1\varepsilon_{12} + w_2\varepsilon_{22} = -w_2$

(4) Condición de homogeneidad:

Aplicando simultáneamente la propiedad de homogeneidad de grado cero de la demanda ordinaria $x_i(p_i,p_j,m)$ y el teorema de Euler, se obtiene:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_i}{\partial p_j} + m \frac{\partial x_i}{\partial m} = 0$$

Dividiendo ambos términos por x_i:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{p_j}{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i}{\partial m} \frac{m}{x_i} = 0$$

O lo que es lo mismo:

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{mi}$$

En el caso de dos bienes:

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{m1} = 0$$

$$\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{m2} = 0$$

Anexo 3

ELECCION BAJO INCERTIDUMBRE

Cuando se toman decisiones de consumo e inversión, no siempre la variables involucradas (precios, renta, etc.) se mantienen fijas en el tiempo, pues éstas pueden darse en un contexto de riesgo e incertidumbre.(Pindick). Así, los consumidores y las empresas han de afrontar la incertidumbre cuando no están seguros de las respuestas de sus decisiones.

Lo relevante en la descripción del comportamiento de un agente económico es la probabilidad que éste asigna a las consecuencias de sus acciones, ya que serán estas probabilidades las que utilizará en sus propios cálculos y las que guiarán la adopción de sus decisiones.

Un requisito para un comportamiento racional bajo incertidumbre es que el individuo pueda traducir dicha incertidumbre en riesgo, asignando probabilidades a los resultados posibles. La probabilidad no es fácil de formalizar. Una interpretación objetiva de la probabilidad se basa en la observación de la frecuencia con que tiende a ocurrir un acontecimiento

El economista adopta una actitud subjetiva de la probabilidad cuando existe incertidumbre (no existen experiencias o antecedentes que permitan fijar la probabilidad). La ocurrencia de un resultado sólo podrá ser percibida intuitivamente, considerándola como una descripción de las creencias o del estado mental del agente económico cuyo comportamiento se investiga.

Para analizar cuantitativamente el riesgo, previamente se requieren conocer los siguientes conceptos

Lotería

Es un elemento del espacio de decisiones del consumidor o individuo

Representación de una lotería:

Si se tiene una lotería que promete un premio X con probabilidad *p*, o un premio *y* con probabilidad $1-p$, entonces:

$$P \circ x + (1-p) \circ y$$

se lee: "el consumidor recibirá un premio x con probabilidad *p* o el premio y con probabilidad $(1-p)$"

Las loterías o las opciones de una lotería están sujetas a las preferencias del consumidor, así:

$$P \circ x + (1-p) \circ y \succ q \circ w + (1-q) \circ z$$

$$\text{ó} \; P \circ x \succ (1-p) \circ y$$

Por lo tanto, se les puede asignar una función de utilidad que describa tales preferencias, entonces:

$$U(P \circ x + (1-p) \circ y) > U(q \circ w + (1-q) \circ z)$$

$$\text{ó} \quad U(P \circ x) > U((1-p) \circ y)$$

Valor Esperado

También denominado Esperanza de pagos o Equivalente cierto, mide el rendimiento medio de la lotería ponderando sus posibles resultados o pagos por su respectiva probabilidad.

$$\mathbf{VE = p \cdot x + (1-p) \cdot y}$$

Función de utilidad esperada

La función de utilidad esperada indica la valoración o utilidad de la lotería o juego para el consumidor. Se obtiene ponderando las utilidades de los posibles resultados por su probabilidad respectiva.

$$\text{FUE} = p \cdot U(x) + (1-p) \cdot U(y)$$

Función de utilidad del valor esperado

La función de utilidad del valor esperado indica la utilidad del valor esperado o equivalente cierto, es decir, representa la utilidad que obtendría el consumidor si tuviese a su alcance el valor esperado.

$$\text{FUVE} = U[p \cdot x + (1-p) \cdot y]$$

ACTITUDES ANTE EL RIESGO

Sea el siguiente juego:

Premio	Probabilidad	utilidad
100	0.5	20
300	0.5	30

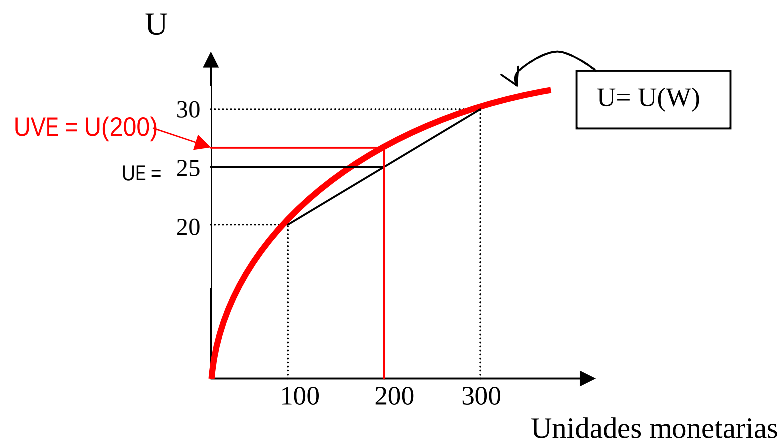
Entonces,

VE = 0.5 (100) + 0.5 (300)
= 50 + 150
= 200

UE = 0.5(20) + 0.5(30)
= 10 + 15
= 25

Según la proyección de la FUVE[14] tendremos los siguientes casos:

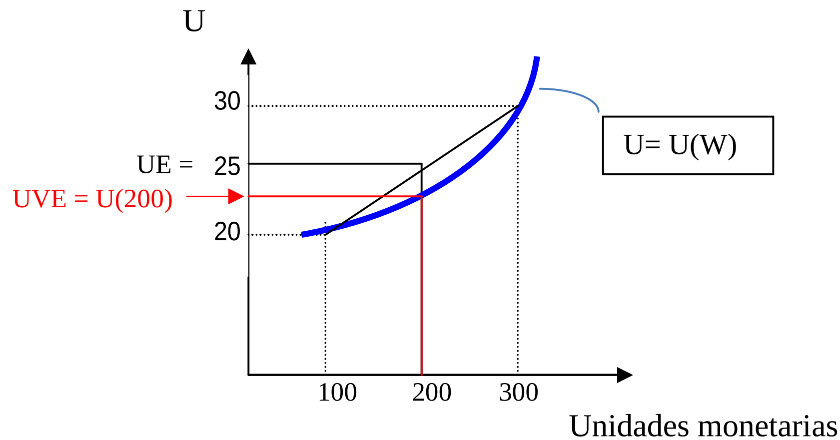
d) Aversión al riesgo



[14]Como veremos más adelante, la trayectoria exacta de la FUVE será determinada por la función de utilidad del consumidor, dependiente de la riqueza: U =F(W)

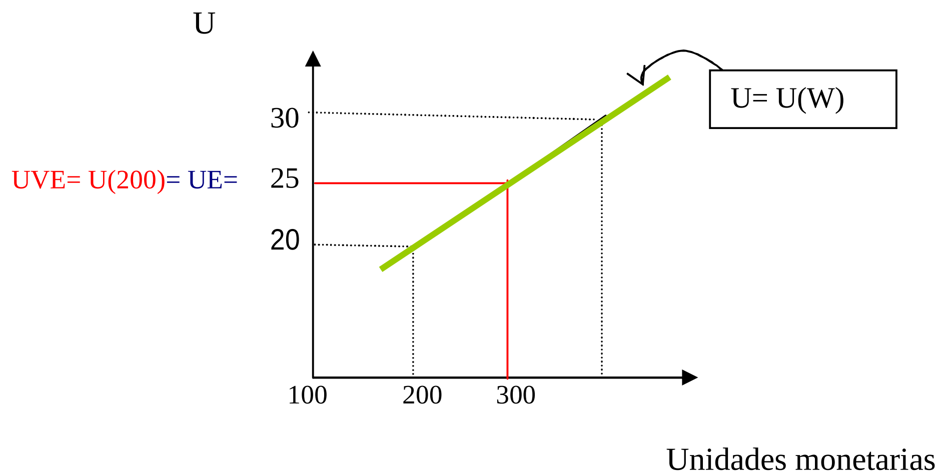
donde, W: riqueza

d) Amante del riesgo



En este caso, el individuo valora más el juego (UE) ya que la utilidad de éste supera la utilidad del valor esperado (UVE <UE). Si le ofreciesen 200 (VE) para que deje de jugar, no aceptaría, preferiría el juego.

c) Neutral al riesgo



El individuo es indiferente ante la alternativa de jugar o recibir con certeza los 200, ya que ambas opciones le reportan la misma utilidad.

REFERENCIALES

Referencia Bibliográficas

Benegas-Lynch, Alberto. BIENES PÚBLICOS, EXTERNALIDADES Y LOS FREE-RIDERS: EL ARGUMENTO RECONSIDERADO. En Estudios Públicos, 71 (invierno 1998). Buenos Aires.

Correa Espinoza, PercyEJERCICIOS DE TEORÍA MICROECONOMICA, Primera edición, Fondo de Desarrollo Editorial Universidad de Lima. Perú. 1997.

Cortez, Rafael. y Rosales, Luis. 340 EJERCICIOS DE MICROECONOMIA. 1ra edición. Apuntes de Estuio 59. CIUP. Lima. 2009.

Dieguez, Hector y **Porto**, Alberto. PROBLEMAS DE MICROECONOMÍA. Amorrortu editores. Buenos Aires. 1979.

Fernández-Baca, Jorge. MICROECONOMIA TEORIA Y APLICACIONES. Segunda Edicion. CIUP. Lima. 2010.

Frank, Robert: "MICROECONOMIA Y CONDUCTA", 4ª edición, Editorial McGraw HillInteramericana S.A., España 2001.

Henderson, J. y Quandt, R. TEORIA MICROECONOMICA Una AproximaciåonMatematica. Ediciones Ariel. Barcelona. 1970

Hirshleifer, Jack y Glazer, Amihai: "MICROECONOMIA, teoría y aplicaciones", 5ª edición. editorial Prentice Hall Hispanoamericana S.A., México 1994.

Kafka, Folke: "TEORIA ECONOMICA", 3ª edición, editorial CIUP, Lima 1994.

Koutsoyiannis, A. MODERN MICROECONOMICS. 2nd Edition. The Macmillan Press Ltd. Hong Kong. 1981

Le Roy, R. y Miller, Roger: "MICROECONOMIA", 3ª edición, editorial Mc Graw-HillLatinoamericana S.A., Bogotá 1988.

Nicholson, Walter: "TEORIA MICROECONOMICA, principios básicos y aplicaciones", 6ªedición, edit. Mc Graw – Hill, España 1997.

Perloff, Jeffrey: "MICROECONOMIA", 3ª edición, editorial Pearson Education S.A., España. 2004.

Parkin, Michael: "MICROECONOMIA", 7ª edición, editorial Pearson. México 2006.

Pindyck, Robert y Rubinfeld, Daniel: "MICROECONOMIA", 5ª edición, editorial PrenticeHall, España 2001.

Ortiz, Alvaro. Manual y ejercicios corregidos de MICROECONOMIA**.**Fondo Editorial Departamento de Economía y Planificación. Universidad Nacional Agraria La Molina. Lima. 2005

Varian, Hal: MICROECONOMIA INTERMEDIA, un enfoque actual. 5ª edición. AntoniBosh editor S.A. España. 1999.

Varian, Hal: ANALISIS MICROECONOMICO", 2ª edición, AntoniBosh editor S.A., España 1992.

Referencias Electrónicas

- http://microeconomia.org/freemind/
- www.bing.com/search?q=manual+de+microeconomia+osinergmin&qs=ds&form=QBRE
- http://economy.blogs.ie.edu/archives/2007/01/que_es_un_free.php
- www.monografias.com/trabajos/ ofertaydemanda/ofertaydemanda.shtml
- www.eumed.net/cursecon/3/equilibrio.htm - 20k
- www.fing.edu.uy/catedras/economia/l1restricpptaria.pps
- www.fing.edu.uy/catedras/economia/l2prefyutilidad.pps
- www.gestiopolis.com/recursos/ experto/catsexp/pagans/eco/no10/equilibrio.htm
- www.eumed.net/cursecon/ppp/envidia-y-solidaridad.ppt